

~~8484~~

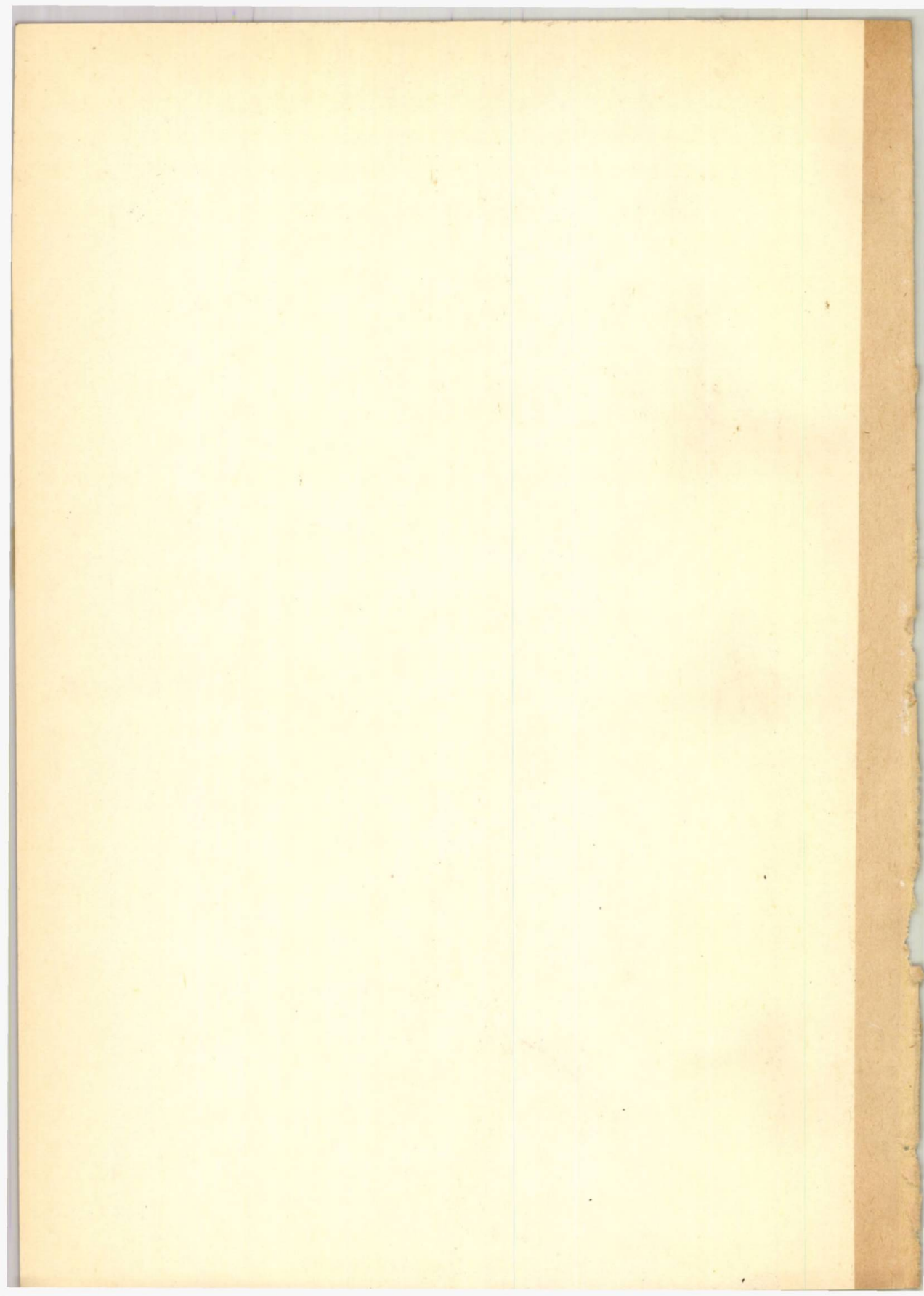
OF 1914

1934

ANALELE UNIVERSITATII BUCURESTI

MATEMATICĂ - MECANICĂ

X



ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

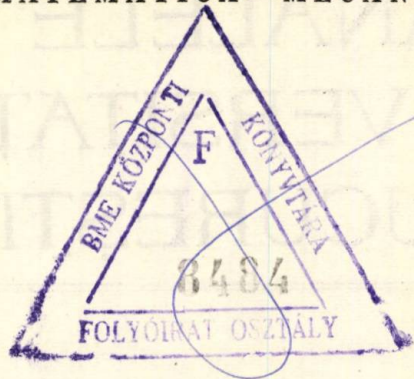
1989



MATEMATICĂ—MECANICĂ

Anul XIX — Nr. I — 1970

MATEMATICĂ — MECANICĂ



COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *Miron Nicolescu*

Membri: Acad. prof. *Caius Iacob*; acad. prof. *Gheorghe Vrânceanu*;
prof. dr. docent *Gheorghe Galbură*; prof. dr. *George Ciucu*;
prof. dr. docent *Romulus Cristescu*; prof. dr. docent *Ciprian
Foiș*; prof. dr. *Viorica Ionescu-Cazimir*; prof. dr. docent
Cabiria Andreian Cazacu

Secretar: Conf. dr. docent *P. P. Teodorescu*



Redacția
ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI
Bd. Gh. Gheorghiu-Dej nr. 64
Telefon 16.01.87/5

S U M A R

	Pag.
DIONISIE CRĂIFĂLEANU and ION MINCĂ: Studiul stabilității unei bare de rotație dublu încadrată acționată de un moment de răsucire și de o forță axială	9
MIHAIL DOBRESU: Asupra mulținii de monogeneitate pentru reprezentări cvasiconforme	19
D. DRĂGHICIU: Asupra unei probleme la limită	25
D. FIRESCU, A. ARSIN și A. MUJA: Criterii de verificare a ipotezelor asupra valorilor ratei de reacție în procesele chimice.....	29
EFTIMIE GRECU: Asupra unei clase de spații simetrice V_4 cu metrică nedefinită	39
N. MICU: Criterii de convergență A.S. a șirurilor de aplicații nemăsurabile.....	53
N. MIHĂILEANU: Suprafețe neolome într-un spațiu neeuclidian.....	57
LIVIU NICOLESCU: Asupra unor spații cu caracteristici drepte	61
TRAIAN NOAGHI: Un spațiu al punctelor cu familii de coordonate.....	67
V. POP și GHOLAMREZA MESRI: Metoda diferențelor finite aplicată la calculul grinzilor pe mediu elastic.....	85
TIBERIU POSTELNICU: Asupra problemei probelor.....	91
V. POSTELNICU: Asupra procedeeleor de înlocuire optimale	101
MIHAELA SĂCUIU și DAN ZORILESCU: O metodă statistică pentru interpretarea măsurătorilor magnitudinilor cutremurelor de pământ produse de centrul Vrancea	111
STOIAN ZAHARIA: Asupra inegalităților lui Cebîșev și Kolmogorov.....	123
IOAN ȘICLOVAN și DOINA TEODORU: Asupra proprietăților de congruență ale polinoamelor ortogonale	127
A. ȘTEFĂNESCU: Metoda gradientului la jocurile convexe pe patrulul unitate	137
P. P. TEODORESCU: Funcții de tensiune în elastodinamică.....	145

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	<u>Стр.</u>
Д. КРАЙФАЛЯНУ И И. МИНКА: Изучение устойчивости заделанного на обоих концах стержня во вращательном движении и подверг- нутого кручению и осевому усилию	9
МИХАЙЛ ДОБРЕСКУ: О множестве моногенности квазиконформных ото- бражений	24
Д. ДРЭГИУЧ: Об одной граничной задаче	28
Д. ФИРЕСКУ, А. АРСИН и А. МУЖА: Критерии поверки гипотез о значениях интенсивной реакции в химических процессах	37
ЕФТИМИЕ ГРЕКУ: О классе симметрических пространств V_4^p со знаконео- предельной метрической формой	51
Н. МИКУ: Критерии почти точной сходимости для рядов неравных отобра- жений	56
Н. МИХЭЙЛЕАНУ: Нонголономые поверхности в неевклидовом пространстве	59
ЛИВЮ НИКОЛЕСКУ: О некоторых пространствах с прямыми характери- стиками	66
ТРАЯН НОАГИ: Об одном пространстве точек с семейством координат	84
В. ПОП и ГОЛАМРЕЗА МАСРИ: Метод конечных разностей применен к вычислению балок на упругом среде.	85
ТИБЕРЮ ПОСТЕЛНИКУ: К выборочной проблеме	91
ВИОРИКА ПОСТЕЛНИКУ: Оптимальные способы восстановления.....	110
М. СЭКУЮ и Д. ЗОРИЛЕСКУ: Статистический метод для интерпретации магнитуды землетрясений в районе Вранча.	121
СТОЯН ЗАХАРИЯ: О неравенствах Чельжева и Колмогорова	125
ИОАН ШИКЛОВАН и ДОИНА ТЕОДОРУ: О свойствах конгруэнтности ортогональных многочленов	135
А. ШТЕФЭНЕСКУ: Метод градиента для непрерывных, вогнутых игр	143
П. П. ТЕОДОРЕСКУ: Функции напряжения в динамике упругости	158

SOMMAIRE

	Page
DIONISIE CRĂIFĂLEANU and ION MINCĂ: The Study of the Stability of a Whirling Bar having Built — in Ends, Loaded by a Torque and an Axial Force	9
MIHAIL DOBRESCU: Sur l'ensemble de monogénéité pour des représentations quasi — conformes	24
D. DRĂCHICIU: Sur un problème aux limites	28
D. FIRESCU, A. ARSIN et A. MUJA: Des critères de vérification des hypothèses sur les valeurs de la constante de vitesse de reaction dans les procces chimiques	37
EFTIMIE GRECU: Sur une classe d'espaces symétriques V_4p à métrique indefinie	52
M. MICU: Critères pour la convergence a.s. des suites d'applications non-mesurables	56
N. MIHĂILEANU: Surfaces nonholonomes dans un espace noneuclidien.....	59
LIVIU NICOLESCU: Sur certains espaces à caractéristiques droites.....	66
TRAIAN NOAGHI: Un espace des points à familles de coordonnées.....	84
V. POP and GHOLAMREZA MESRI: The Finite Difference Method Used to Compute Beams on Elastic Medium.....	85
TIBERIU POSTELNICU: Ueber das Stichprobenproblem.....	91
V. POSTELNICU: On Optimal Replacement Policies	110
MIHAELA SĂCUIU and DAN ZORILESCU: A Statistical Method for the Interpretation of the Earthquakes Magnitudes in the Zone Vrancea	121
STOIAN ZAHARIA: On Cebyshev — Kolmogorov Inequalities.....	126
IOAN ȘICLOVAN et DOINA TEODORU: Sur les propriétés de congruence des polynômes orthogonaux	135
A. ȘTEFĂNESCU: Gradient Method for Convex Continuous Games.....	143
P. P. TEODORESCU: Fonctions de tension en élastodynamique.....	158

TABLE 1	
Year	Amount
1900	100.00
1901	105.00
1902	110.00
1903	115.00
1904	120.00
1905	125.00
1906	130.00
1907	135.00
1908	140.00
1909	145.00
1910	150.00
1911	155.00
1912	160.00
1913	165.00
1914	170.00
1915	175.00
1916	180.00
1917	185.00
1918	190.00
1919	195.00
1920	200.00
1921	205.00
1922	210.00
1923	215.00
1924	220.00
1925	225.00
1926	230.00
1927	235.00
1928	240.00
1929	245.00
1930	250.00
1931	255.00
1932	260.00
1933	265.00
1934	270.00
1935	275.00
1936	280.00
1937	285.00
1938	290.00
1939	295.00
1940	300.00
1941	305.00
1942	310.00
1943	315.00
1944	320.00
1945	325.00
1946	330.00
1947	335.00
1948	340.00
1949	345.00
1950	350.00
1951	355.00
1952	360.00
1953	365.00
1954	370.00
1955	375.00
1956	380.00
1957	385.00
1958	390.00
1959	395.00
1960	400.00
1961	405.00
1962	410.00
1963	415.00
1964	420.00
1965	425.00
1966	430.00
1967	435.00
1968	440.00
1969	445.00
1970	450.00
1971	455.00
1972	460.00
1973	465.00
1974	470.00
1975	475.00
1976	480.00
1977	485.00
1978	490.00
1979	495.00
1980	500.00
1981	505.00
1982	510.00
1983	515.00
1984	520.00
1985	525.00
1986	530.00
1987	535.00
1988	540.00
1989	545.00
1990	550.00
1991	555.00
1992	560.00
1993	565.00
1994	570.00
1995	575.00
1996	580.00
1997	585.00
1998	590.00
1999	595.00
2000	600.00
2001	605.00
2002	610.00
2003	615.00
2004	620.00
2005	625.00
2006	630.00
2007	635.00
2008	640.00
2009	645.00
2010	650.00
2011	655.00
2012	660.00
2013	665.00
2014	670.00
2015	675.00
2016	680.00
2017	685.00
2018	690.00
2019	695.00
2020	700.00
2021	705.00
2022	710.00
2023	715.00
2024	720.00
2025	725.00
2026	730.00
2027	735.00
2028	740.00
2029	745.00
2030	750.00
2031	755.00
2032	760.00
2033	765.00
2034	770.00
2035	775.00
2036	780.00
2037	785.00
2038	790.00
2039	795.00
2040	800.00
2041	805.00
2042	810.00
2043	815.00
2044	820.00
2045	825.00
2046	830.00
2047	835.00
2048	840.00
2049	845.00
2050	850.00
2051	855.00
2052	860.00
2053	865.00
2054	870.00
2055	875.00
2056	880.00
2057	885.00
2058	890.00
2059	895.00
2060	900.00
2061	905.00
2062	910.00
2063	915.00
2064	920.00
2065	925.00
2066	930.00
2067	935.00
2068	940.00
2069	945.00
2070	950.00
2071	955.00
2072	960.00
2073	965.00
2074	970.00
2075	975.00
2076	980.00
2077	985.00
2078	990.00
2079	995.00
2080	1000.00

THE STUDY OF THE STABILITY OF A WHIRLING BAR HAVING BUILT-IN ENDS, LOADED BY A TORQUE AND AN AXIAL FORCE

DIONISIE CRAIFĂLEANU and ION MINCĂ

A straight bar, having circular cross-section and built-in ends is examined. The built-in ends are realized by means of long bearings, which impeded the angular deflections and the transversal displacements produced by the flexion. The loading consists of a torque and of an axial force applied at the ends, and of the transversal inertia forces due to the rotation of the bar round its axis.

Using complex expressions for the geometrical and mechanical parameters, the differential equations of the motion reduce to a single one of fourth order. It is solved by means of Galerkin's method. The condition of loss of stability, in the form of a relation between the torque, the axial force and the angular velocity is obtained. The results are presented in diagrams. The differences between the calculated and the exact values, in the well-known particular cases, do not exceed 1%.

1. INTRODUCTION

In the mechanical engineering are found various examples of whirling slender bars, acted on by a torque and by an axial force (propeller — shafts of ships, drill — pipes, drills for cannons etc.). For some bars it is necessary a study of the stability and of the vibrations, taking into account the simultaneous effect of the rotation and of the loads.

In a series of papers, relatively recent, different particular cases of bars having circular or rectangular cross-section are studied. In this way, for a bar having circular cross-section, the condition of loss of stability is found in the form of a parabolical relation between the values of the torque and of the axial force. In this case, a study of the stability and of the vibrations is also worked out, taking into consideration the effect of the rotation of the bar about its axis [5]. According to the obtained results, this effect can become important in certain conditions for the slender bars.

In the present paper the stability of the bar having built-in ends, acted on by a torque and by an axial force and rotating about its axis is studied.

2. ASSUMPTIONS OF CALCULATION

A bar with constant circular cross-section and having initially a straight axis is considered. The built-in ends are realized by means of long bearings, which do not impede the angular deflection produced by the twisting and the axial displacements, but the deflection curve is here held in alignment. The bar is acted on by a torque and an axial force at the ends, and as well as by the transversal inertia forces due to the mass of the bar in rotation. Between the extremities of the bar there are no concentrated masses (discs, wheels etc.). The angular velocity of the bar is constant.

The condition of the loss of stability is obtained using the hypothesis of small deflections. The geometrical and mechanical parameters are expressed by means of complex quantities. Thus, the deflection curve is described by a single differential equation, with complex coefficients, which is solved by the Galerkin's method. This leads to the eigenvalues equation, representing the condition of the loss of stability. It is an algebraical equation of sixth degree, in which the torque, the axial force and the angular velocity are expressed by means of nondimensional parameters. The solutions have been established by digital computer.

3. SYMBOLS

The following symbols are used (see also Fig. 1):

l	— length of bar;
I	— axial moment of inertia of the cross-section;
E	— modulus of elasticity of the material;
q	— mass per unit length of bar;
ξ, η, ζ	— axes of the coordinate frame which rotates with the angular velocity ω round the initial axis ξ of the bar;
v, w	— transverse displacements of the elastic axis in the direction of the η and ζ axis, respectively;
y, z	— axes in the cross-section, perpendicular on the deflected axis of the bar;
P	— axial force;
M_t	— torque;
ω	— angular velocity;
p	— circular frequency of the bar, in the coordinate frame (ξ, η, ζ);
$P_0 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$	— Euler's force;

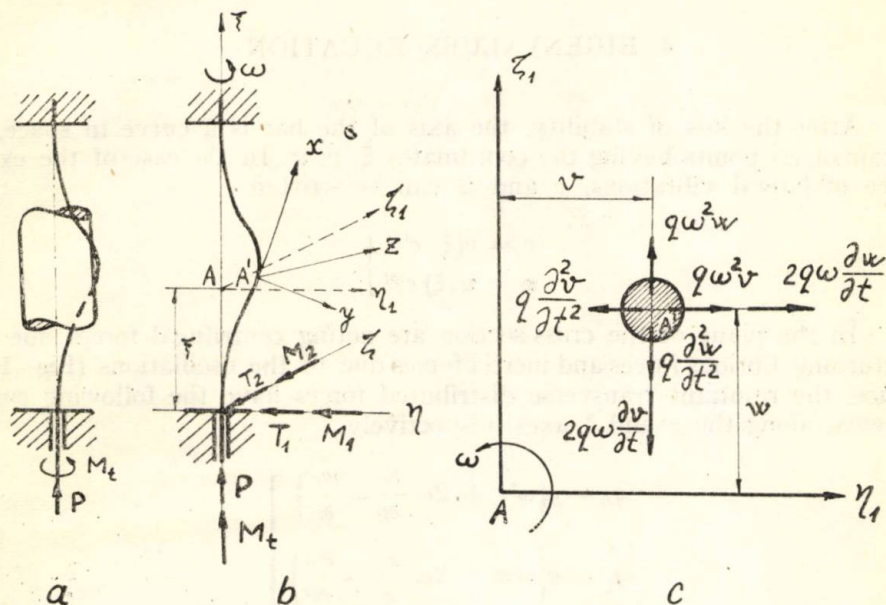


Fig. 1

$$M_{t_0} = 2,86065 \frac{\pi EI}{l}$$

— critical torque corresponding to the static buckling due to pure torsion;

$$\omega_0 = 2,26685 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{q}}$$

— critical speed of the unloaded bar;

$$\eta_c = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}$$

— nondimensional axial force;

$$\eta_t = \frac{M_t l}{\pi EI}$$

— nondimensional torque;

$$\eta_\omega = \frac{\omega l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{q}{EI}}$$

— nondimensional angular velocity;

$$\eta_v = \frac{\rho l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{q}{EI}}$$

— nondimensional circular frequency;

t

— time;

$$i = \sqrt{-1}.$$

4. EIGENVALUES EQUATION

After the loss of stability, the axis of the bar is a curve in space, a certain of its points having the coordinates ξ, v, w . In the case of the existence of lateral vibrations, v and w can be written

$$\left. \begin{aligned} v &= v(\xi) e^{ipt} \\ w &= w(\xi) e^{ipt} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

In the plane of the cross-section are acting centrifugal forces due to the turning, Coriolis forces and inertia forces due to the oscillations (Fig. 1c). Hence, the resultant transverse distributed forces have the following components, along the η and ζ axes, respectively

$$\left. \begin{aligned} q_\eta &= q \left(\omega^2 v + 2\omega \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ q_\zeta &= q \left(\omega^2 w - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

The bending moments have the expressions

$$\left. \begin{aligned} M_y &= Pw + M_t \frac{\partial v}{\partial \xi} + T_2 \xi + M_1 - \int_0^\xi q_\zeta \xi \, d\xi \\ M_z &= Pv - M_t \frac{\partial w}{\partial \xi} + T_1 \xi - M_2 - \int_0^\xi q_\eta \xi \, d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where T_1, T_2, M_1, M_2 are the reactions in the built-in end situated at the origin of the coordinate frame (ξ, η, ζ) (Fig. 1b).

The differential equations of the deflection curve are

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} &= -M_z \\ EI \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= -M_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Differentiating twice the relations (4) and introducing (3) it results

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} &= -P \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + M_t \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + q \left(\omega^2 v + 2\omega \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ EI \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} &= -P \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - M_t \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} + q \left(\omega^2 w - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Substituting the variables ξ and t by the nondimensional quantities

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\pi}{l} \xi \\ \tau &= \alpha t = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{q}} \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

the equations (5) take the form

$$\left. \begin{aligned} v^{IV} - \frac{M_l l}{\pi EI} w''' + \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} v'' - q \frac{\omega^2 l^4}{\pi^4 EI} v + \\ + q \frac{\alpha^2 l^4}{\pi^4 EI} \dot{v} - 2q \frac{\omega \alpha l^4}{\pi^4 EI} \dot{w} &= 0 \\ v^{IV} + \frac{M_l l}{\pi EI} v''' + \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} w'' - q \frac{\omega^2 l^4}{\pi^4 EI} w + \\ + q \frac{\omega^2 l^4}{\pi^4 EI} \dot{w} + 2q \frac{\omega \alpha l^4}{\pi^4 EI} \dot{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where have been marked by dots the derivatives with respect to time τ . With the notations from §3, the relations (7) become

$$\left. \begin{aligned} v^{IV} - \eta_i w''' + \eta_c v'' - \eta_\omega^2 v + \ddot{v} - 2\eta_\omega \dot{w} &= 0 \\ w^{IV} + \eta_i v'' + \eta_c w'' - \eta_\omega^2 w + \ddot{w} + 2\eta_\omega \dot{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Introducing in (8) the complex displacement

$$r = v + iw, \quad (9)$$

the single differential equation is obtained

$$r^{IV} + i\eta_i r''' + \eta_c r'' - \eta_\omega^2 r + \ddot{r} + 2i\eta_\omega \dot{r} = 0 \quad (10)$$

The solution is sought of the form

$$r = R(u) e^{i\eta_\omega \tau} \quad (11)$$

which substituted in (10) leads to

$$R^{IV} + i\eta_i R''' + \eta_c R'' - \eta_\omega^2 R - \eta_\nu^2 R - 2\eta_\omega \eta_\nu R = 0 \quad (12)$$

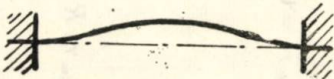
By denoting

$$k = \eta_\omega + \eta_\nu \quad (13)$$

the equation (12) becomes

$$L(R) = R^{IV} + i\eta_i R''' + \eta_c R'' - k^2 R = 0 \quad (14)$$

Table 1

The error-function	$\varphi_1 = u^2 - \pi u + \pi \sin u$			$\varphi_2 = -12u^3 + 18\pi u^2 - 6\pi^2 u + 3\pi^2 \sin 2u$			$\varphi_3 = 27u^4 - 54\pi u^3 + 33\pi^2 u^2 - 6\pi^3 u + 2\pi^3 \sin 3u$				
Approximate representation of the error-function											
ξ	0	$l/2$	l	0	$l/2$	l	0	$l/3$	$l/2$	$2l/3$	l
u	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/2$	π	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
Boundary conditions	$\varphi_1 = 0$	—	$\varphi_1 = 0$	$\varphi_2 = 0$	$\varphi_2 = 0$	$\varphi_2 = 0$	$\varphi_3 = 0$	$\varphi_3 = 0$	—	$\varphi_3 = 0$	$\varphi_3 = 0$
	$\varphi'_1 = 0$	$\varphi'_1 = 0$	$\varphi'_1 = 0$	$\varphi'_2 = 0$	—	$\varphi'_2 = 0$	$\varphi'_3 = 0$	—	$\varphi'_3 = 0$	—	$\varphi'_3 = 0$
	—	$\varphi''_1 = 0$	—	—	$\varphi''_2 = 0$	—	—	—	$\varphi'''_3 = 0$	—	—
Observations	All the boundary conditions are satisfied			All the boundary conditions are satisfied			The boundary conditions for the function and its first three derivatives are satisfied.				

Applying to this equation the Galerkin's method, the solution

$$R = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 \quad (15)$$

is considered, the functions φ_1 , φ_2 and φ_3 satisfying the boundary conditions. In the Tabel 1 are given these functions and it is shown the manner in which they satisfy the limit conditions. Using these expressions, it results

$$R = a_1(u^2 - \pi u + \pi \sin u) + a_2(-12u^3 + 18\pi u^2 - 6\pi^2 u + 3\pi^2 \sin 2u) + \\ + a_3(27u^4 - 54\pi u^3 + 33\pi^2 u^2 - 6\pi^3 u + 2\pi^3 \sin 3u) \quad (16)$$

To determine the coefficients a_1 , a_2 , a_3 , the following expressions are calculated

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi L(R)\varphi_1(u)du &= 0 \\ \int_0^\pi L(R)\varphi_2(u)du &= 0 \\ \int_0^\pi L(R)\varphi_3(u)du &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

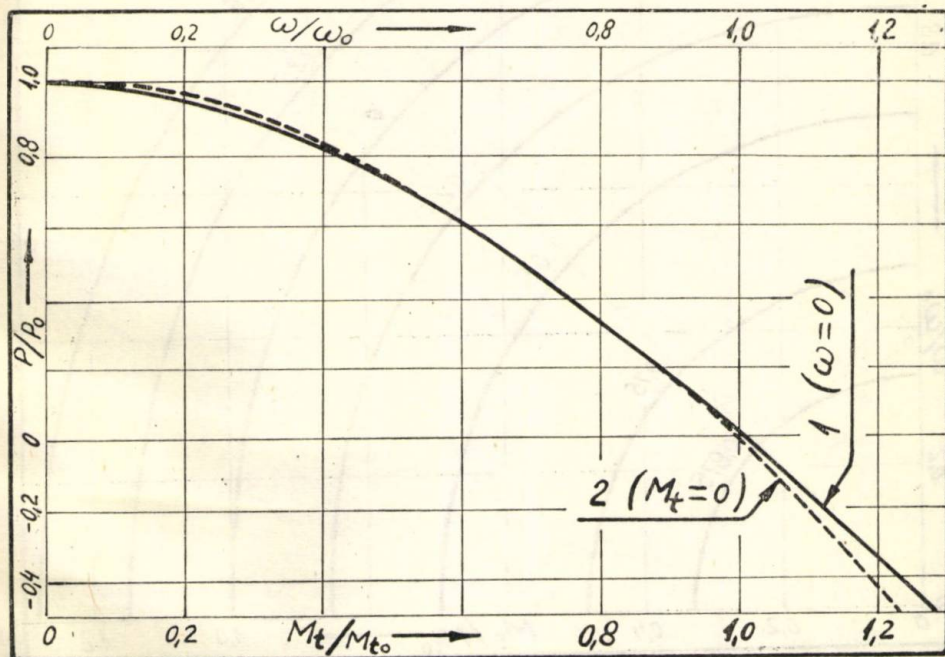


Fig. 2

After performing the calculus, the equations (17) become

$$\begin{aligned}
 & a_1(2,936766 - 0,705820\eta_c - 0,571050k^2) + a_2(43,711069 i\eta_t) + \\
 & + a_3(-20,304148 - 19,209038 \eta_c + 8,937454k^2) = 0 \\
 & a_1(-43,711069 i\eta_t) + a_2(8638,705296 - 1014,340104\eta_c - \\
 & - 220,514222k^2) + a_3(10295,3101801\eta_t) = 0 \\
 & a_1(-20,304148 - 19,209038\eta_c + 8,937454k^2) + \\
 & + a_2(-10295,310180 i\eta_t) + a_3(280668,751272 - 19403,141504\eta_c - \\
 & - 1995,202876k^2) = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

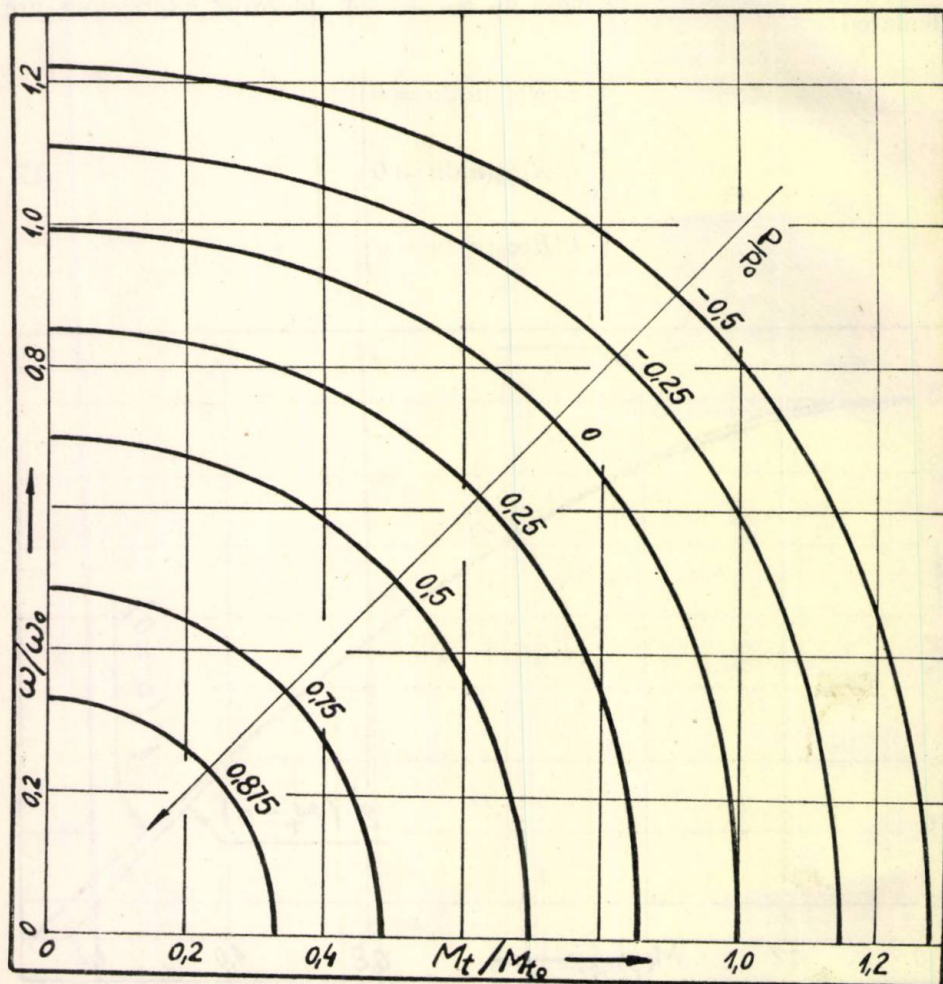


Fig. 3

The condition of compatibility of the system (18) is

$$\left. \begin{aligned} & \eta_t^2(-240,95966k^2 + 3589,4663 - 552,89719\eta_c) + k^6 + \\ & + k^4(-195,64073 + 16,707475\eta_c) + k^2(6907,17 - 1435,7737\eta_c + \\ & + 68,288853\eta_c^2) - 29862,421 + 12949,649\eta_c - 1604,4444\eta_c^2 + \\ & + 58,714458\eta_c^3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

and represents the condition of the loss of stability of the bar. The equation has been solved for $\eta_c = -2 \dots 4$, obtaining the values of the parameters η_t , η_c and k . To handle easily the results, the ratios $\frac{M_t}{M_{t0}}$, $\frac{P}{P_0}$ and $\frac{\omega}{\omega_0}$ have been determined, corresponding to this values, using the relations

$$\frac{M_t}{M_{t0}} = \frac{\eta_t}{2,86065}, \quad \frac{P}{P_0} = \frac{\eta_c}{4}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{k}{2,26685}. \quad (20)$$

It is considered that there are no vibrations ($\eta_v = 0$, $\eta_w = k$).

The results of the calculus are given in diagrams (Fig. 2 and 3).

5. RESULTS

In Fig. 2 are plotted the curves representing the loss of stability in two particular cases: curve 1 for a motionless bar, acted on by a torque and by an axial force, and curve 2 for a bar in rotation subjected only to an axial force. The two curves have a very approached form and can be approximated by the parabolas

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{P}{P_0} - 1 = 0 \\ & \left(\frac{M_t}{M_{t0}} \right)^2 + \frac{P}{P_0} - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

The condition of loss of stability for a bar in rotation and subjected to torsion is plotted in Fig. 3 for different values of the axial force $\left(\frac{P}{P_0} = 0,5 \dots 1 \right)$.

From equation (19) it results also some well-known particular cases. Thus, in the case of the simple compression ($M_t = 0$, $\omega = 0$), the critical load is obtained

$$P_{critical} = 1,002 P_0 \quad (22)$$

For a bar subjected to simple torsion ($P = 0$, $\omega = 0$), the critical torque is

$$M_{t critical} = 1,0078 M_{t0} \quad (23)$$

The fundamental critical speed of the unloaded bar ($P = 0$, $M_t = 0$) is

$$\omega_{critical} = 0,9908 \omega_0 \quad (24)$$



6. CONCLUSIONS

The solutions of the equation (19) in the particular cases of the buckling by simple compression, or by simple torsion and the critical speed are very approached to those which are well — known in the technical literature.

In the case of a bar acted on by a torque and by an axial force ($\omega = 0$), the relation between the two loads at the instant of the loss of stability is parabolical, similiary to that of a bar with hinged ends.

To study the stability of a bar in rotation, subjected to a torque and to an axial force, the equation (19) must be solved, or the graph shown in Fig. 3 can be used.

Observing that the curves plotted in Fig. 3 can be approximated by ellipses and those from Fig. 2 by parabolas, the condition of loss of stability can be written in the form of the equation of an elliptical paraboloid

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{M_{t0}}\right)^2 + \frac{P}{P_0} = 1, \quad (25)$$

the results having a satisfactory precision for the engineering calculus.

REFERENCES

1. C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik. Erster Band, Zweite erweiterte Auflage, Springer Verlag, Berlin. Göttingen, Heidelberg, 1953.
2. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин и В. У. Феодосьев, Расчеты на прочность в машиностроении. т. III, Москва, Машгиз, 1959.
3. M. Beck, Knickung gerader Stäbe durch Druck und Konservative Torsion. Ingenieur — Archiv, 1953, 23, 231.
4. Л. М. Качанов, Устойчивость упруго — пластического равновесия стато-скрученного вала. Доклады А. Н. СССР, 1953, 4, м. 88.
5. D. Crăifăleanu, Lateral Vibrations of Whirling Bars subiectioned to an axial Force and to a Torque. Revue Roumaine des Sciences Techniques, série de Mécanique Appliquée, 1966, nr. 2, tome 11.
6. Е. Л. Николай, Об устойчивости прямолинейной формы равновесия статого и скрученного стержня. Сборник работ Е. Л. Николай, Труды по механике, Гостехиздат, 1955.
7. S. Timoshenko, Théorie de la stabilité élastique. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1947.
8. A. Trösch, Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen. Ingenieur—Archiv, 1952, 20, 258.
9. H. Ziegler, Stabilitätsprobleme bei geraden Stäbe und Wellen. ZAMP, 1951, II, 265.
10. H. Ziegler, Knickung gerader Stäbe unter Torsion. ZAMP, 1952, III, 96.
11. H. Ziegler, On the Concept of Elastic Stability. Advances in Applied Mechanics, New-York, 1956, 4.

Received on 20.IX. 1969.

Polytechnical Institute, Bucharest

ASUPRA MULȚIMII DE MONOGENEITATE PENTRU REPREZENTĂRI CVASICONFORME

MIHAIL DOBRESCU

1. Fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ o funcție complexă de o variabilă complexă și un punct z_0 din domeniul de definiție.

Prin *mulțimea de monogeneitate a funcției f în punctul z_0* se înțelege mulțimea $\mathfrak{M}_{z_0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bar{M}_\varepsilon$, unde

$$M_\varepsilon = \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \mid 0 < |z - z_0| \leq \varepsilon \right\}.$$

Kasner a introdus în 1928 această mulțime pentru funcții diferențiable și a arătat că în acest caz e un cerc (cercul lui Kasner). Ecuația acestui cerc este

$$\zeta(z_0) = A + B e^{-2i\varphi},$$

unde

$$A = \frac{1}{2} [(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)],$$

$$B = \frac{1}{2} [(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)],$$

derivatele parțiale fiind calculate în z_0 .

În cazul funcțiilor analitice, acest cerc se reduce la un punct, iar pentru funcțiile analitice conjugate la un cerc cu centrul în origine.

În cazul în care f este o reprezentare cvasiconformă cu o pereche de caracteristici, adică un homeomorfism care transformă cercuri infinitezimale în elipse infinitezimale, Petru Caraman [1] a studiat modul în care se exprimă elementele cercului lui Kasner cu ajutorul elementelor caracteristice ale funcției f într-un punct de diferențiabilitate cu jacobian nenul. Pentru transformările spațiale, Caraman a înlocuit mulțimea de monogeneitate (care nu mai poate fi definită în sensul din plan) prin mulțimea $\mathfrak{M}'_{z_0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bar{M}'_\varepsilon$,

unde

$$M'_\varepsilon = \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} \mid 0 < \|x - x_0\| \leq \varepsilon \right\},$$

care pentru funcțiile diferentiabile este $\bigcup_s \frac{\partial f}{\partial s}$,

La sugestia prof. dr. docent Cabiria Andreian — Cazacu am considerat problema exprimării elementelor cercului lui Kasner într-un punct de diferențiabilitate — cu jacobian nenul — al unei reprezentări cvasiconforme cu două perechi de caracteristici (a cărei definiție a fost dată de Șabat), precum și problema asemănătoare în spațiu.

2. Definiție. O reprezentare cvasiconformă cu două perechi de caracteristici este un homeomorfism $f: R^2 \rightarrow R^2$ care transformă elipse infinitesimale cu caracteristicile α, β, γ în elipse infinitesimale cu caracteristicile $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (unde $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sînt funcții continue în R^2) ([2], p. 128).

Dacă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ avem într-un punct de diferențiabilitate

$$\gamma dx^2 - 2\beta dx dy + \alpha dy^2 = J^{-1}(\gamma_1 du^2 - 2\beta_1 du dv + \alpha_1 dv^2).$$

Din identitățile

$$u(x(u, v), y(u, v)) \equiv u, v(x(u, v), y(u, v)) \equiv v,$$

obținem prin derivare sistemul

$$\begin{aligned} \alpha u_x^2 + 2\beta u_x u_y + \gamma u_y^2 &= J\alpha_1, \\ (1) \quad \alpha u_x v_x + \beta(u_x v_y + u_y v_x) + \gamma u_y v_y &= J\beta_1, \\ \alpha v_x^2 + 2\beta v_x v_y + \gamma v_y^2 &= J\gamma_1. \end{aligned}$$

Distingem 3 cazuri.

Cazul I: $\beta = 0, \beta_1 = 0$.

Avem

$$du = \sqrt{\alpha} u_x dx' + \sqrt{\gamma} u_y dy',$$

$$dv = \sqrt{\alpha} v_x dx' + \sqrt{\gamma} v_y dy',$$

unde

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{\alpha}}, \quad dy' = \frac{dy}{\sqrt{\gamma}}.$$

Ținînd seama de sistemul (1), obținem

$$du = \sqrt{J\alpha_1}(dx' \cos \varphi + dy' \sin \varphi),$$

$$dv = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}} \frac{v_x}{u_y} \sqrt{J\alpha_1} (-dx' \sin \varphi + dy' \cos \varphi).$$

Să punem

$$a = \sqrt{J\alpha_1}, \quad b = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}} \frac{v_x}{u_y} a.$$

$a, |b|$ sînt semiaxele elipsei de caracteristici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ iar φ este unghiul axei Ou cu axa Ox .

Deducem

$$A = \frac{1}{2} [(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} + \frac{b}{\sqrt{\gamma}} \right) \cos \varphi - i \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma}} + \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right) \sin \varphi \right],$$

$$B = \frac{1}{2} [(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} - \frac{b}{\sqrt{\gamma}} \right) \cos \varphi + i \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma}} - \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right) \sin \varphi \right],$$

$$|B| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} - \frac{b}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma}} - \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 \sin^2 \varphi}.$$

Cazul II: $\beta = 0, \beta_1 \neq 0$.

A doua ecuație a sistemului (1) este în acest caz

$$\alpha u_x v_x + \gamma u_y v_y = J\beta_1.$$

Notînd cu θ_1 unghiul semiaxei mari a elipsei de caracteristici $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ cu Ou și făcînd rotația

$$d\bar{u} = du \cos \theta_1 + dv \sin \theta_1,$$

$$d\bar{v} = -du \sin \theta_1 + dv \cos \theta_1,$$

reducem problema la primul caz, însă pentru funcțiile

$$\bar{u} = u \cos \theta_1 + v \sin \theta_1$$

$$\bar{v} = -u \sin \theta_1 + v \cos \theta_1$$

deci

$$\alpha \bar{u}_x \bar{v}_x + \gamma \bar{u}_y \bar{v}_y = 0$$

și

$$d\bar{u} = a(dx' \cos \varphi + dy' \sin \varphi),$$

$$d\bar{v} = b(-dx' \sin \varphi + dy' \cos \varphi),$$

unde φ este unghiul semiaxei mari a elipsei $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ cu axa Ox .

Elementele cercului lui Kasner pentru transformarea $(\bar{u}, \bar{v})$ sînt

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \frac{1}{2} [(\bar{u}_x + \bar{v}_y) + i(\bar{v}_x - \bar{u}_y)] = \frac{1}{2} [(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)] e^{-i\theta_1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} + \frac{b}{\sqrt{\gamma}} \right) \cos \varphi - i \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma}} + \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right) \sin \varphi \right] \\ \bar{B} &= \frac{1}{2} (\bar{u}_x - \bar{v}_y) + i(\bar{v}_x + \bar{u}_y) = \frac{1}{2} (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) \cdot e^{-i\theta_1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} - \frac{b}{\sqrt{\gamma}} \right) \cos \varphi + i \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma}} - \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right) \sin \varphi \right],\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} + \frac{b}{\sqrt{\gamma}} \right) \cos \varphi - i \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma}} + \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right) \sin \varphi \right] e^{i\theta_1}, \\ |B| &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha}} - \frac{b}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma}} - \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 \sin^2 \varphi}.\end{aligned}$$

Cazul III: $\beta \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$,

Efectuînd rotația

$$d\bar{x} = dx \cos \theta + dy \sin \theta,$$

$$d\bar{y} = -dx \sin \theta + dy \cos \theta,$$

unde θ este unghiul semiaxe mari a elipsei α, β, γ cu axa Ox , prin considerații asemănătoare obținem

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha'}} + \frac{b}{\sqrt{\gamma'}} \right) \cos \varphi - i \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma'}} + \frac{b}{\sqrt{\alpha'}} \right) \sin \varphi \right] e^{i(\theta_1 - \theta)}, \\ |B| &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{\alpha'}} - \frac{b}{\sqrt{\gamma'}} \right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{a}{\sqrt{\gamma'}} - \frac{b}{\sqrt{\alpha'}} \right)^2 \sin^2 \varphi},\end{aligned}$$

unde φ este unghiul semiaxelor mari ale elipselor caracteristice, iar

$$\alpha' = \alpha \cos^2 \theta + 2\beta \cos \theta \sin \theta + \gamma \sin^2 \theta,$$

$$\gamma' = \alpha \sin^2 \theta - 2\beta \cos \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta.$$

3. În spațiul R^n considerăm reprezentări cvasiconforme cu două perechi de caracteristici care transformă elipsoizi infimezimali în elipsoizi infimezimali, deoarece, în acest caz, cercul lui Kasner se înlocuiește cu un elipsoid.

În adevăr [1] mulțimea de monogeneitate este $\bigcup_s \left\{ \frac{\partial f}{\partial s} \right\}$. Să explicăm acest lucru. Notînd componentele funcției f cu u^i ecuațiile parame-

trice ale mulțimii de monogeneitate sînt

$$X^h = \sum_i \frac{\partial u^h}{\partial x^i} \alpha_i,$$

unde α_i sînt cosinusurile directoare ale unei direcții arbitrare s.

Eliminînd pe α_i între ecuațiile precedente și relația

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1,$$

obținem

$$\sum_{h,k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n J_i^h J_i^k \right) X^h X^k = J^2,$$

unde J_i^h este complementul algebric al lui $\frac{\partial u^h}{\partial x^i}$ în $J = \det \left(\frac{\partial u^h}{\partial x^i} \right)$.

Elipsoidul infinitezimal

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i dx^j = \rho^2$$

se transformă în elipsoidul infinitesimal

$$\sum_{h,k=1}^n \left(\frac{1}{J^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} J_i^h J_j^k \right) du^h du^k = \rho^2.$$

Dacă punem

$$\frac{1}{J^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} J_i^h J_j^k = \alpha_{hk},$$

$$a'_i = \sum_{h,k=1}^n a_{hk} \beta_i^h \beta_i^k,$$

$$\alpha'_i = \sum_{h,k=1}^n \alpha_{hk} \gamma_i^h \gamma_i^k,$$

unde β_i^h sînt cosinusurile directoare ale semiaxelor elipsoidului infinitezimal inițial față de axele de coordonate, iar γ_i^h sînt cosinusurile directoare ale semiaxelor elipsoidului infinitezimal transformat față de axele de coordonate, și dacă b_i^h sînt cosinusurile unghiurilor direcțiilor principale ale celor doi elipsoizi infinitezimali, atunci

$$\frac{\partial u^h}{\partial x^i} = \sum_{j,k=1}^n \beta_j^i \gamma_k^h \frac{\sqrt{a'_j}}{\sqrt{\alpha'_k}} b_j^k,$$

deci caracteristicile $\sum_{i=1}^n J_i^h J_i^k$ se exprimă numai cu ajutorul elementelor transformării.

BIBLIOGRAFIE

1. Caraman, P. *Le cercle de Kasner et ses extensions dans E_n* . Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza” Iași, 12, 57—71 (1966).
2. Caraman, P. *Homeomorfisme quasiconforme n -dimensionale*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1968.

Primită la redacție la 1. II 1970.

Universitatea București
Facultatea de matematică — mecanică

О МНОЖЕСТВЕ МОНОГЕННОСТИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Краткое содержание

Решается задача выражения элементов круга Каснера в точке дифференцируемости, с ненулевым якобианом, квазиконформного отображения с двумя парами характеристик, с помощью характеристических элементов отображения, а также аналогическая задача в пространстве.

SUR L'ENSEMBLE DE MONOGÉNÉITÉ POUR DES REPRÉSENTATIONS QUASI—CONFORMES

Résumé

On résout le problème d'exprimer les éléments du cercle de Kasner dans un point de différentiabilité, à jacobien non nul, d'une représentation quasi-conforme à deux paires de caractéristiques, à l'aide des éléments caractéristiques de la représentation, de même que le problème analogue dans l'espace.

ASUPRA UNEI PROBLEME LA LIMITĂ

D. DRĂGHICIU

În această notă se dă soluția unei probleme la limită de tip Neuman, pentru cerc. Soluția găsită duce la o generalizare a formulei lui U. Dini.

Fie în planul xOy două cercuri concentrice C_R și C_r cu centrul în origine de raze R și r cu $r < R$. Fie λ un număr real cu $|\lambda| < 1$; $\vec{n}$ normala interioară; ρ și θ coordonatele polare și $g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ o funcție continuă dată.

Propoziție. Există totdeauna o funcție olomorfă $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ în interiorul cercului C_R cu $Re[F(z)]$ uniformă, astfel ca

$$\frac{dU(R, \theta)}{dn} - \lambda \frac{dU(r, \theta)}{dn} = g(\theta). \quad (1)$$

Demonstrație. I. Construcția funcției $F(z)$ se poate realiza prin reducerea problemei la problema lui Neumann pentru cerc cu ajutorul unei ecuații integrale în felul următor:

Să punem $\frac{dU(R, \theta)}{dn} = \varphi(\theta)$, atunci formula lui U. Dini ne dă

$$F(z) = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \ln(\zeta - z) d\theta + \text{constantă}, \quad (2)$$

unde $\zeta = Re^{i\theta}$; $z = \rho e^{i\sigma}$ și $\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 0$ o condiție necesară pentru ca $F(z)$ să fie olomorfă în interiorul cercului C_R .

Dacă se ia partea reală a lui $F(z)$ și se substituie în (1) se obține următoarea ecuație integrală pentru $\varphi(\theta)$:

$$\varphi(\theta) - \frac{\lambda R}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \sigma) + r^2} d\sigma = g(\theta) \quad (3)$$

Astfel, relațiile (2) și (3) permit rezolvarea problemei propuse.

II. Această problemă, însă, se poate trata pe cale directă pînă la capăt în modul următor.

Fie $F(z) = U(x, y) + i(V(x, y))$ o funcție olomorfă în C_R . Această funcție este dezvoltabilă în serie Taylor cu raza de convergență R .

Fie, atunci $F(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, unde $c_0 = \gamma_0 + i\delta_0$, $c_n = \gamma_n + i\delta_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

Presupunem dezvoltarea valabilă și pe cercul C_R . Pentru punctul Q de afixă $\zeta = Re^{i\theta}$ vom avea

$$F(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n R^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Luînd partea reală a lui $F(z)$ și substituind-o în (1), după identificarea coeficienților se obține

$$\gamma_n = -\frac{a_n}{n(R^{n-1} - \lambda^n)}; \quad \delta_n = -\frac{b_n}{n(R^{n-1} - \lambda^n)}.$$

Dar a_n și b_n sînt coeficienții Fourier ai lui $g(\theta)$ de unde rezultă

$$\gamma_n = -\frac{1}{\pi n(R^{n-1} - \lambda^n)} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$\delta_n = -\frac{1}{\pi n(R^{n-1} - \lambda^n)} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin n\theta d\theta$$

sau

$$c_n = \gamma_n + i\delta_n = -\frac{1}{\pi n(R^{n-1} - \lambda^n)} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dacă se face intervertirea între operația de integrare și însumare, atunci expresia lui $F(z)$ va fi

$$F(z) = -\frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \zeta^{-n}}{n(1 - \lambda k^{n-1})} d\theta + \text{const.}$$

unde prin k s-a notat raportul $\frac{r}{R}$ ($k = \frac{r}{R}$).

Deoarece $|\lambda| < 1$ atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \zeta^{-n}}{n(1 - \lambda k^{n-1})} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{k^p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n k^{np}}{n \zeta^n} \right)$$

Se observă ușor că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n k^{np}}{n \zeta^n} = -\ln(\zeta - zk^p)$ și deci făcînd din nou intervertirea între sumă și integrală obținem

$$F(z) = \frac{R}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{k^p} \int_0^{2\pi} g(\theta) \ln(\zeta - zk^p) d\theta + \text{const.} \quad (4)$$

Formula (4) este o generalizare a formulei lui U. Dini. Dacă se face $\lambda = 0$ atunci avem de a face cu problema clasică a lui Neumann pentru cerc și $F(z)$ se reduce la formula lui U. Dini.

Să arătăm că $F(z)$ găsită în (4) este soluția problemei propuse.

Ținând cont că

$$\frac{dU(R, \theta)}{dn} = -\frac{1}{R} \operatorname{Re} \left\{ z \frac{dF(z)}{dz} \right\}_{\rho=R};$$

iar

$$\frac{dU(r, \theta)}{dn} = -\frac{1}{r} \operatorname{Re} \left\{ z \frac{dF(z)}{dz} \right\}_{\rho=r}$$

vom calcula

$$\operatorname{Re} \left\{ z \frac{dF(z)}{dz} \right\}$$

și obținem:

$$z \frac{dF(z)}{dz} = -\frac{R}{2\pi} \sum_{P=0}^{\infty} \frac{\lambda^P}{k^P} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{\zeta + zk^P}{\zeta - zk^P} d\theta$$

iar

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ z \frac{dF(z)}{dz} \right\} &= -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \sigma) + \rho^2} d\theta - \\ &- \frac{R}{2\pi} \sum_{P=1}^{\infty} \frac{\lambda^P}{k^P} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{R^{2P+2} - \rho^2 r^{2P}}{R^{2P+2} - 2\rho R^{P+1} r^P \cos(\theta - \sigma) + R^2 r^{2P}} d\theta. \end{aligned}$$

Trecând la limita în

$$\frac{1}{R} \operatorname{Re} \left\{ z \frac{dF(z)}{dz} \right\}$$

când $\rho \rightarrow R$ se observă că toți termenii sumei

$$\sum_{P=1}^{\infty} \frac{\lambda^P}{k^P} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{R^{2P+2} - \rho^2 r^{2P}}{R^{2P+2} - 2\rho R^{P+1} r^P \cos(\theta - \sigma) + \rho^2 r^{2P}} d\theta$$

sînt convergenți iar termenul pentru $P=0$ ne dă integrala lui Poisson care de asemenea este convergentă și este egală cu $g(\theta)$, deci avem

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, \theta)}{dn} &= -\frac{1}{R} \operatorname{Re} \left\{ z \frac{dF(z)}{dz} \right\}_{\rho \rightarrow R} = g(\theta) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{P=1}^{\infty} \frac{\lambda^P}{k^P} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{R^{2P} - r^{2P}}{R^{2P} - 2R^P r^P \cos(\theta - \sigma) + r^{2P}} d\theta. \end{aligned}$$

În interiorul cercului C_R , $F(z)$ fiind olomorfă avem

$$\frac{dU(r, \theta)}{dn} = \frac{R}{2\pi r} \sum_{P=0}^{\infty} \frac{\lambda^P}{k^P} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{R^{2P+2} - r^{2P+2}}{R^{2P+2} - 2R^{P+1} r^{P+1} \cos(\theta - \sigma) + r^{2P+2}} d\theta$$

de unde

$$\begin{aligned} \frac{dU(R, \theta)}{dn} - \lambda \frac{dU(r, \theta)}{dn} &= g(\theta) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{P=1}^{\infty} \frac{\lambda^P}{k^P} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{R^{2P} - r^{2P}}{R^{2P} - 2R^P r^P \cos(\theta - \sigma) + r^{2P}} d\theta - \\ &- \frac{R\lambda}{2\pi r} \sum_{P=0}^{\infty} \frac{\lambda^P}{k^P} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{R^{2P+2} - r^{2P+2}}{R^{2P+2} - 2R^{P+1} r^{P+1} \cos(\theta - \sigma) + r^{2P+2}} d\theta. \end{aligned}$$

Se observă ușor că cele două sume au termenii egali și de semne contrare, și deci

$$\frac{dU(R, \theta)}{dn} - \lambda \frac{dU(r, \theta)}{dn} = g(\theta)$$

BIBLIOGRAFIE

- N. Ciorănescu, Sur la détermination d'une fonction harmonique pour des conditions initiales globales, "Rendiconti Lincei", 1932.
 N. Ciorănescu, Quelques nouveaux problèmes sur les fonctions harmoniques, "Anali di mat, pura ed. appl", 1932.
 C. Iacob, Sur le problème de Dirichlet pour les fonctions de plusieurs variables complexes, "Bull, des Sci, mathem", Paris, 1934.
 C. Iacob, Sur un problème Dirichlet-Neumann pour les fonctions de deux variables complexes, "C. R. du soixante septième Congrès des Sociétés Savantes", 1934.
 C. Iacob, Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites, Applications à l'Hydrodynamique, "Mathematica", t. XI, Cluj, 1935.
 C. Iacob, Sur le problème de Dirichlet, à deux dimensions, "C. R. Acad. sc. Paris", 1937.
 C. Iacob, Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de Dirichlet, "Mathematica", Cluj, 1939.
 C. Iacob, Introducere matematică în mecanica fluidelor, Editura Academiei R.P.R., 1952.

Primită la redacție la 10 XI. 1969.

Universitatea București
 Institutul pedagogic

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ

Краткое содержание

В заметке дано решение одной граничной задачи типа Неймана для круговой области. Полученное решение обобщает формулу У. Дини.

SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES

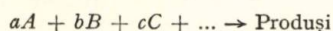
Résumé

Dans cette note on donne la solution d'un problème aux limites de Neumann pour les cercles. La solution trouvée conduit à une généralisation d'une formule de U. Dini.

CRITERII DE VERIFICARE A IPOTEZELOR ASUPRA VALORILOR RATEI DE REACȚIE ÎN PROCESELE CHIMICE

D. FIRESCU, A. ARSIN, A. MUJA

Se consideră o reacție chimică generală de forma

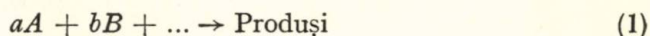


cu viteza de reacție $v = \lambda[A]^a[B]^b \dots$, λ , fiind rata de reacție.

Se construiește un criteriu optimal de verificare a două ipoteze simple asupra valorilor ratei de reacție λ și se determină condițiile în care cheltuielile necesare pentru efectuarea unei experiențe sînt minime.

În ultima parte a lucrării se determină probabilitatea acceptării ipotezei ca valoarea parametrului să fie λ , precum și timpul mediu de efectuare a experienței.

Fie o reacție chimică generală de forma



a cărei viteza de reacție v este dată de relația

$$v = \lambda[A]^a[B]^b \dots$$

unde $a + b + \dots = N$ iar $a, b, \dots$ reprezintă ordinele de reacție ale reactanților $A, B, \dots$ respectiv.

Constanta λ , numită constantă de viteză sau rată de reacție, reprezintă viteza de reacție atunci cînd concentrațiile reactanților respectiv produsul lor, sînt egale cu unitatea. Deci, rata de reacție λ este o proprietate caracteristică fiecărei reacții, independentă de concentrația reactanților, dar dependentă de temperatură și — adeseori de mediul de reacție.

Deoarece viteza de reacție variază cu temperatura, toate determinările experimentale de viteze de reacție trebuie efectuate la temperatură riguros constantă. După amestecarea reactanților în proporții cunoscute la momentul inițial $t_0 = 0$, se iau probe din amestec la momentele $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ și se determină concentrația unuia sau mai multor reactanți la momentele $t_i (i = 1, 2, \dots)$

Se cunosc și alte metode pentru determinarea experimentală a lui λ .

Ținînd seama de caracterul aleator al ciocnirilor dintre molecule, ciocniri în urma cărora se pot forma sau nu noi molecule produs de reacție [5]

ne propunem să dăm un criteriu de verificare a ipotezelor asupra valorilor ratei de reacție λ .

Fie H_0 ipoteza inițială ca $\lambda = \lambda_0$ și H_1 ipoteza alternativă $\lambda = \lambda_1$. Ținând seama de legea de desfășurare a reacției (1) și admitînd că în timpul experienței înlocuim substanța care a reacționat cu o cantitate egală din aceeași substanță, rezultă că fluxul momentelor aleatoare de reacție este un flux Poisson cu intensitățile $N\lambda_0$ cînd este adevărată ipoteza H_0 și $N\lambda_1$ cînd este adevărată ipoteza H_1 .

Să notăm

p — probabilitatea apriori ca să fie adevărat ipoteza H_0 .

q — probabilitatea apriori ca să fie adevărată ipoteza H_1 ($p + q = 1$);

α — probabilitatea de acceptare a ipotezei H_0 cînd este adevărată ipoteza H_1 ;

β — probabilitatea de acceptare a ipotezei H_1 cînd este adevărată ipoteza H_0 ;

v_α — mărimea pierderii în cazul în care se acceptă ipoteza H_0 fiind adevărată ipoteza H_1 ;

v_β — mărimea pierderii în cazul cînd se acceptă ipoteza H_1 fiind adevărată ipoteza H_0 .

Să considerăm că în intervalul $(0, t)$ au loc ciocniri eficace în momentele aleatoare $t_1, t_2, \dots, (t)_{n(t)}$, unde $n(t)$ reprezintă numărul de molecule — produs de reacții la momentul t și să notăm

$$v(t) = (t_1, t_2, \dots, t_{n(t)})$$

fluxul aleator de transformări în intervalul $(0, t)$.

Fie

$$f(v(t); \lambda) = (N\lambda)^{n(t)} \cdot e^{-\lambda Nt}$$

densitatea de probabilitate a fluxului $v(t)$.

Efectuarea unei experiențe necesită anumite cheltuieli, pentru a căror minimalizare vom construi un criteriu S .

Presupunem că în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, cheltuielile sînt egale cu $C(v(t))\Delta t$ și deci cheltuielile pînă la momentul t_s de întrerupere a experienței sînt date de

$$\int_0^{t_s} C(v(t)) dt$$

În ipoteza $C(v(t)) = C > 0$, care este justificată din punct de vedere practic, cheltuielile medii legate de folosirea criteriului S sînt:

$$R(p, s) = p\alpha v_\alpha + q\beta v_\beta + pCE_0\{t_s\} + qCE_1\{t_s\} \quad (2)$$

unde E_0, E_1 sînt valorile medii corespunzătoare ipotezelor H_0 și H_1 .

Relația (2) se mai scrie

$$R(p, S) = p[\alpha v_\alpha + CE_0\{t_s\}] + q[\beta v_\beta + CE_1\{t_s\}] \quad (3)$$

Pe de altă parte, dacă p_t și q_t sînt respectiv probabilitățile apriori corespunzătoare faptului că sînt adevărate ipotezele H_0 și H_1 dacă s-a realizat

$v(t)$, avem

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{pf(v(t); \lambda_0)}{pf(v(t); \lambda_0) + qf(v(t); \lambda_1)} (p_t + q_t = 1) \\ q_t &= \frac{qf(v(t); \lambda_1)}{pf(v(t); \lambda_0) + qf(v(t); \lambda_1)} \end{aligned} \quad (4)$$

Deoarece la fiecare moment se ia o singură decizie privind întreruperea experienței și acceptarea uneia din ipotezele H_0 sau H_1 , sau continuarea mai departe a experienței, este necesar să considerăm funcțiile $R_1(p, S)$ și $R_2(p, S)$ corespunzătoare acestor două decizii. Dacă $r(p_t) = \min_S R(p_t, S)$ iar $r_1(p_t) = \min_S R_1(p_t, S)$ și $r_2(p_t) = \min_S R_2(p_t, S)$ atunci

$$r(p_t) = \min [r_1(p_t), r_2(p_t)] \quad (5)$$

Din (3) rezultă că pierderea minimă $r_1(p_t)$ în condițiile întreruperii procesului la momentul t , este

$$r_1(p_t) = \begin{cases} p_t v_\alpha, & p_t < \frac{v_\beta}{v_\alpha + v_\beta} \\ q_t v_\beta, & p_t > \frac{v_\beta}{v_\alpha + v_\beta} \end{cases} \quad (6)$$

Așadar, pentru ca pierderile în momentul întreruperii experienței să fie minime este necesar ca pentru valorile $p_t < \frac{v_\beta}{v_\alpha + v_\beta}$ să se accepte ipoteza H_1 , par pentru $p_t > \frac{v_\beta}{v_\alpha + v_\beta}$ să se accepte ipoteza H_0 .

Pentru a determina $r_2(p_t)$ considerăm mulțimea M a criteriilor pentru care, cu probabilitatea 1, la momentul t se ia decizia de continuare a experienței. În acest caz

$$r_2(p_t) = \inf_{S \in M} R_2(p_t, S) \quad (7)$$

Din relația (3) pentru

$$p = \lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2, \text{ unde } 0 < p_1, p_2 < 1$$

avem

$$R(\lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2, S) = \lambda R(p_1, S) + (1 - \lambda) R(p_2, S)$$

De aici, ținînd seama de (7), obținem

$$r_2(\lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2) \geq \lambda r_2(p_1) + (1 - \lambda) r_2(p_2)$$

Cum funcția $r_2(p_t) > 0$ rezultă că ea este continuă. Fie un interval (p'_i, p''_i) astfel încît dacă $p_t \in (p'_i, p''_i)$ să avem $r_2(p_t) < r_1(p_t)$, deci în baza re-

lației (5) experiența trebuie să continue. În primul moment t , în care $p_t \notin (p'_i, p''_i)$ experiența întrerupe. Dacă $p_{t_s} \leq p'_i$ atunci se acceptă ipoteza H_1 , iar dacă $p_{t_s} \geq p''_i$ se acceptă ipoteza H_0 .

Criteriul S construit mai sus presupune că p_t sînt cunoscute din (4). Deoarece calculul probabilităților p_t cu ajutorul formulelor (4) este dificil vom folosi raportul de verosimilitate

$$\frac{f(v(t); \lambda_1)}{f(v(t); \lambda_0)} = \frac{p(1-p_t)}{p_t \cdot q} \quad (8)$$

care rezultă imediat din (4).

Logaritmînd această expresie și ținînd seama de (2) găsim

$$\xi(t) = \left[\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right]^{-1} \ln \frac{p(1-p_t)}{qp_t} \quad (9)$$

Această formulă constituie o transformare biunivocă a punctelor $p_t \in (0,1)$ în punctele $\xi(t) \in (-\infty, \infty)$

Cunoscînd expresia densității de probabilitate a fluxului $v(t)$ obținem

$$\xi(t) = n(t) - Kt \quad (10)$$

unde

$$K = \frac{N(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)}$$

Prin folosirea transformării (10) imaginea intervalului (p'_i, p''_i) va fi (ξ_0, ξ_1)

Prin urmare criteriul ce minimizează cheltuielile pune în evidență faptul că trebuie să cunoaștem numărul de molecule produs de reacție $n(t)$ ce apar pînă la momentul t inclusiv; apoi, după formula (10) se determină $\xi(t)$

Ținînd seama că $\xi(t)$ este o funcție monotonă, criteriul pe care-l construim constă în: la primul moment t , în care $p_t \notin (p'_i, p''_i)$ se transformă în $\xi(t) \notin (\xi_0, \xi_1)$ experiența se întrerupe. Evenimentele $p_{t_s} \leq p'_i$ și $p_{t_s} \geq p''_i$ sînt echivalente cu $\xi(t_s) \leq \xi_0$ și $\xi(t_s) \geq \xi_1$. În primul caz acceptăm ipoteza H_0 în al doilea caz acceptăm ipoteza H_1 .

Prin urmare problema ce se pune este calcularea mărimilor ξ_0 și ξ_1 cunoscînd probabilitățile α și β .

Întroducînd variabilele aleatoare

$$\psi_0 = \begin{cases} 1 & \xi(t_s) = \xi_0 \\ 0 & \xi(t_s) \geq \xi_1 \end{cases} \quad \psi_1 = \begin{cases} 0 & \xi(t_s) = \xi_0 \\ 1 & \xi(t_s) \geq \xi_1 \end{cases}$$

valoarea medie condiționată a raportului de verosimilitate în momentul atingerii valorilor ξ_0 și ξ_1 cînd este adevărată ipoteza H_0 este

$$m_0^i = \frac{E_0 \left\{ \frac{f(v(t_s), \lambda_1)}{f(v(t_s), \lambda_0)} \psi_i \right\}}{P\{\psi_i = 1 \mid \lambda = \lambda_0\}} \quad (11)$$

Ținând seama de faptul că

$$E_0 = \left\{ \frac{f(v(t_s), \lambda_1)}{f(v(t_s), \lambda_0)} \psi_i \right\} = E_1\{\psi_i\} = P\{\psi_i = 1 \mid \lambda = \lambda_1\}$$

și

$$P\{\psi_1 = 1 \mid \lambda = \lambda_1\} = 1 - \beta, \quad P\{\psi_1 = 1 \mid \lambda = \lambda_0\} = \alpha$$

găsim că

$$m_0^0 = \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad m_0^1 = \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (12)$$

Din relațiile (8) și (9) rezultă

$$\ln \frac{f(v(t_s), \lambda_1)}{f(v(t_s), \lambda_0)} = \xi(t) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

sau

$$\frac{f(v(t_s), \lambda_1)}{f(v(t_s), \lambda_0)} e^{\xi(t_s) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}$$

Majorînd și minorînd această expresie obținem:

$$e^{\inf \xi(t_s) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \leq \frac{f(v(t_s), \lambda_1)}{f(v(t_s), \lambda_0)} \leq e^{\sup \xi(t_s) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \quad (13)$$

unde inf și sup se iau după toate valorile lui $\xi(t_s)$ în momentele de terminare a experienței, ce corespund acceptării ipotezelor H_0 și H_1 .

Din (11) (12) și (13), obținem

$$e^{\inf \xi(t_s) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq e^{\sup \xi(t_s) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \quad (14)$$

cînd se acceptă ipoteza H_0 , și

$$e^{\inf \xi(t_s) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \leq e^{\sup \xi(t_s) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \quad (15)$$

cînd se acceptă ipoteza H_1 .

Dacă la momentul $t = t_s$ se acceptă ipoteza H_0 atunci $\xi(t_s) = \xi_0$ deci,

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} = e^{\xi_0 \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}$$

de unde rezultă

$$\xi_0 = \frac{\ln \frac{\beta}{1 - \alpha}}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \quad (16)$$

La momentul $t < t_s$, $\xi(t) < \xi_1$, deci la momentul $t = t_s$, $\xi_0 < \xi_1 + 1$ și ținând seama de aceasta obținem

$$e^{\xi_1 \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \leq e^{(\xi_1+1) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}$$

adică

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\xi_1} \leq \frac{1-\beta}{\alpha} \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\xi_1+1}$$

Observăm că de aici nu se pot obține valorile lui ξ_1 ci numai o evaluare superioară și inferioară

$$\xi_1 \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \leq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \leq (\xi_1 + 1) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

$$\ln \frac{1-\beta}{\alpha} - \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} < \xi_1 < \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$$

În ipoteza că $\frac{1-\beta}{\alpha}$ este mult mai mare decât $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ putem lua pentru ξ_1 valoarea

$$\xi_1 = \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (17)$$

Procesul aleator $\xi(t)$ considerat este un proces Markov, deoarece transformările care pot să apară în viitor nu depind de istoria procesului $\xi(t)$ pînă în momentul t .

Fie $P(\xi(t); \lambda)$ probabilitatea acceptării ipotezei H_1 cînd valoarea parametrului este λ și să notăm $\xi(0) = \xi$

Probabilitățile α și β sînt egale respectiv cu

$$\alpha = P(0; \lambda_0) \quad \beta = 1 - P(0; \lambda_1) \quad (18)$$

Procesul descris mai sus poate fi definit în intervalul de timp $(0, \Delta t)$ pentru $\xi_0 < \xi < \xi_1$ cu ajutorul relației

$$P(\xi(t); \lambda) = (1 - N\lambda\Delta t) P(\xi - K\Delta t; \lambda) + N\lambda\Delta t P(\xi(t) + 1 - K\Delta t) + 0(\Delta t)$$

Ținînd seama că $P(\xi(t); t)$ este o funcție continuă de ξ pe intervalul (ξ_0, ξ_1) și trecînd la limită pentru $\Delta t \rightarrow 0$ deducem ecuația diferențială

$$K \frac{dP(\xi(t); \lambda)}{d\xi} + N\lambda P(\xi(t); \lambda) = N\lambda P(\xi(t) + 1; \lambda) \quad (19)$$

care exprimă evoluția în timp a procesului.

Soluția acestei ecuații, în condițiile la limită

$$P(\xi(t); \lambda) = \begin{cases} 0, & \xi < \xi_0 \\ 1, & \xi > \xi_1 \end{cases}$$

este

$$P(\xi(t); \lambda) = 1 + Ke^{-\left(\frac{N\lambda}{K}\right)\xi} \sum_{l=0}^{\chi(\xi)} \frac{(-1)^l}{l!} \left[(\xi_1 - \xi - l)^{\frac{N\lambda}{K}} e^{-\frac{N\lambda}{K}} \right]^l \quad (20)$$

unde $\chi(\xi)$ este un număr întreg

$$\xi_1 - \xi - 1 \leq \chi(\xi) \leq \xi_1 - \xi$$

Folosind condiția $P(\xi_0; \lambda) = 0$ se determină și valoarea constantei arbitrare K , și găsim

$$K = e^{-\frac{N\lambda}{K} \cdot \xi_0} \left\{ \sum_{l=0}^{\chi(\xi_0)} \frac{(-1)^l}{l!} [\xi - \xi_0 - l]^{\frac{N\lambda}{K}} e^{-\frac{N\lambda}{K}} \right\}^l$$

Observăm că dacă se cunoaște valoarea lui ξ_0 și ținând seama de (18) din (20) se poate determina valoarea lui ξ_1 .

Observăm că dacă se cunoaște valoarea lui ξ_0 și ținând seama de (18), din (20) se poate determina valoarea lui ξ_1 .

O problemă importantă care se pune este determinarea timpului mediu $T(\xi(t); \lambda)$ pentru efectuarea experienței, cînd valoarea parametrului este λ .

Criteriul construit pentru verificarea ipotezelor H_0 și H_1 necesită în medie un timp mai mic de efectuare a experienței decât oricare alt criteriu cu aceleași probabilități α și β .

Folosind un raționament analog celui pentru determinarea ecuației (19) se deduce ecuația diferențială pentru $T(\xi(t); \lambda)$ în ipoteza că $\xi(0) = \xi$. Găsim

$$K \frac{dT(\xi(t); \lambda)}{d\xi} + N\lambda T(\xi; \lambda) = 1 + N\lambda T(\xi; \lambda)$$

a cărei soluție este

$$T(\xi; \lambda) = \frac{\zeta(\xi) + 1}{N\lambda} + \gamma e^{-\frac{N\lambda}{K}\xi} \sum_{l=0}^{\chi(\xi)} \frac{(-1)^l}{l!} \left[(\xi_1 - \xi - l)^{\frac{N\lambda}{K}} e^{-\frac{N\lambda}{K}} \right] - \\ - \frac{1}{N\lambda} e^{\frac{N\lambda}{K}} (\xi_1 - \xi - 1) \sum_{l=0}^{\chi(\xi)-1} e^{-\frac{N\lambda}{K}\xi} \sum_{i=0}^l \frac{(-1)^i}{i!} \left[(\xi_1 - \xi - l - 1)^{\frac{N\lambda}{K}} \right]^i$$

unde constanta γ se determină din condițiile inițială $T(\xi_0; \lambda) = 0$.

În încheiere, să observăm că rezultatele de mai sus, s-au obținut în ipoteza că substanța care reacționează se înlocuiește cu o cantitate egală din aceeași substanță. Dar, dat fiind caracterul reversibil al reacțiilor

chimice, nu se va transforma în produși de reacție întreaga cantitate de substanță adăugată.

Dacă notăm prin $X(t)$ variabila aleatoare care reprezintă numărul de molecule active la momentul t , fie

$$a_j = P\{X(t_k + 0) = j + 1 | X(t_k - 0) = j\}, \quad j = 0, 1, 2$$

unde $\{t_k (k = 0, 1, 2, \dots); t_0 = 0\}$ este șirul momentelor aleatoare de înlocuire a moleculelor de substanță care au reacționat.

Probabilitatea $F_i(n, t)$ ca la momentul $t (t > 0)$ să existe n molecule active știind că la momentul inițial $t_0 = 0$ erau $i (i \geq 0)$ molecule active satisface ecuațiile

$$F'_i(n, t) = -v_n F_i(n, t) + \lambda F_i(n + 1, t) \quad (n = 0, 1, \dots, i)$$

$$F'_i(i + 1, t) = -v_{i+1} F_i(i + 1, t)$$

unde

$$v_0 = \lambda a_0, \quad v_n = \lambda(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, \dots, i + 1)$$

Rezultă

$$F_i(n, t) = (-\lambda)^{i+1-n} \sum_{k=n}^{i+1} e^{-v_k t} \left(\sum_{\substack{h=n \\ h \neq k}}^{i+1} (v_k - v_h)^{-1} \right) \quad (n = 0, 1, \dots, i + 1)$$

Dacă variabila aleatoare τ reprezintă intervalul de timp dintre momentele de atingere a stării active, atunci

$$P\{\tau > t\} = \sum_{n=0}^{i+1} F_i(n, t)$$

ceea ce arată că densitatea de probabilitate a fluxului aleator de transformări $v(t)$ nu se modifică.

BIBLIOGRAFIE

1. Bartholomew D. J., Testing for departure from the exponential distribution *Biometrika*, 44, 1957, pp. 253—56.
2. Ciucu G., Craiu V., Teoria estimăției și verificarea ipotezelor statistice, Ed. Tehnică, 1968.
3. Epstein B., Testing for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential, *Technometrics*, 2 1—2, 1960, pp. 167—183.
4. Mihoc Gh., Firescu D., Statistica matematică, Ed. didactică și pedagogică, București, 1966.
5. Smith J. M., Chemical Engineering Kinetics, Mc, Graw-Hill, New York, 1956.
6. Wald A. Statistical decision functions, New York, 1950.
7. —, Sequential Analysis, New York, 1958.

Facultatea de chimie
Universitatea București

Primită la redacție la 10. X. 1969

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ЗНАЧЕНИЯХ ИНТЕНСИВНОЙ РЕАКЦИИ В ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

Краткое содержание

Дана химическая реакция общей формы



причём скорость реакции $v = \lambda[A]^a[B]^b$, ..., а интенсивность реакции — λ .

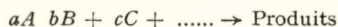
В работе приводится оптимальный критерий проверки двух простых гипотез о значениях интенсивности реакции при минимальных затратах на эксперимент.

В работе определяются, также, вероятность принятия гипотезы о заданном значении λ и среднее время эксперимента.

DES CRITÈRES DE VÉRIFICATION DES HIPOTHÈSES SUR LES VALEURS DE LA CONSTANCE DE VITESSE DE REACTION DANS LES PROCCES CHIMIQUES

Résumé

On considère une réaction chimique générale de la forme



à vitesse de réaction $v = \lambda[A]^a[B]^b$..., λ , étant la constante de vitesse de réaction.

On construit un critère optimal de vérification à deux hypothèses simples sur les valeurs de la constante de vitesse de réaction et l'on détermine les conditions lesquelles les dépenses nécessaires pour l'exécution d'une expérience sont minimales.

Dans la dernière partie du travail on détermine la probabilité d'accepter l'hypothèse que la valeur du paramètre soit de même que le temps moyen d'effectuer l'expérience.

ASUPRA UNEI CLASE DE SPAȚII SIMETRICE V_{4p} CU METRICĂ NEDEFINITĂ

EFTIMIE GRECU

C. Teleman a arătat [5] că ecuația

$$w = [x^1x^2] + [x^3x^4] + \dots + [x^{2p+1}x^{2p+2}] = 0, \quad ([x^ax^b] = x^a dx^b - x^b dx^a)$$

definește pe sfera S_{2p+1} din spațiul euclidian E_{2p+1} ($x^1, \dots, x^{2p+2}$)

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{2p+2})^2 = R^2$$

un spațiu nolonom V_{2p+1}^{2p} , a cărui metrică este aceea a unui spațiu simetric $V_{2p}(\lambda)$, care posedă un grup de mișcări izomorf cu grupul rotațiilor G_{p^2+2p} în $2p+2$ variabile, ce invariază forma Pfaff w . Aceste spații, care se numesc spații Vranceanu, au fost găsite de prof. Gh. Vranceanu ca spații ale lui Riemann, care admit un grup maxim de transformări în ele însele după spațiile cu curbura constantă.

Prof. Gh. Vranceanu, plecând de la faptul că aceste spații se pot considera ca spații neolonyme pe sferă, a găsi metrica și a arătat cum poate fi utilizată această proprietate pentru un studiu global al acestor spații [3].

C. Teleman [6] a extins aceste considerații la clasa spațiilor simetrice V_{4p}^* homeomorfe cu spațiile proiective cuaternionice, arătând cum se poate defini un paralelism Levi-Civita și cum se pot obține ecuațiile finite ale geodezicelor acestor spații.

În nota de față se studiază o clasă de spații simetrice V_{4p} cu metrică riemanniană nedefinită care, în variabile pseudo-cuaternionice, coincid local cu spațiile Q^p —cu formă hermitică unitară, arătând cum se poate defini un paralelism Levi-Civita pe subspațiul nolonom Q^p definit de ecuațiile (1) (2) și determinând ecuațiile diferențiale ale geodezicelor spațiilor considerate.

* * *

Să considerăm algebra pseudo-cuaternionilor peste corpul numerelor reale. Este o algebră de ordinul patru, cu element unitate, asociativă, necomutativă, fără diviziune, cu tabela lui Cayley

.	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	$+e_4$	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$+e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

Dacă notăm

$$e_1 = 1, e_2 = i, e_3 = j, e_4 = k$$

avem relațiile

$$i^2 = -j^2 = -k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = -i, ki = -ik = j$$

Fie x un pseudo-cuaternion

$$x = a + ib + jc + kd$$

unde a, b, c, d , sînt numere reale. Conjugatul lui x este elementul

$$\bar{x} = a - ib - jc - kd$$

Semn norma lui x fiind definită de formula

$$N(x) = \|x\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

se arată ușor că avem

$$N^2(x) = \|\bar{x}\|^2 = x\bar{x}$$

Fie acum y un alt pseudo-cuaternion

$$y = a' + b'ib + c'jc + d'kd$$

Avem relațiile

$$xy = aa' - bb' + cc' + dd' + i(ab' + a'b + dc' - d'c) + j(ac' + a'c + db' - d'b) + k(ad' + a'd + bc' - b'c)$$

$$\bar{y}\bar{x} = aa' - bb' + cc' + dd' - i(ab' + a'b + dc' - d'c) - j(ac' + a'c + db' - d'b) - k(ad' + a'd + bc' - b'c)$$

de unde rezultă formula

$$\overline{xy} = \overline{y} \overline{x}$$

Avem apoi succesiv

$$N^2(xy) = (xy) \quad (\overline{xy}) = (xy) \quad (\overline{y} \overline{x}) = x(\overline{y} y) \overline{x} = (x \overline{x}) \quad (\overline{y} \overline{y}) = N^2(x) N^2(y)$$

de unde obținem formula

$$N(xy) = N(x)N(y)$$

1. — DEFINIREA SPAȚIILOR V_{4p} CA SPAȚII PROIECTIVE PSEUDO-CUATERNIONICE

Să considerăm acum cuadrica C_{4p+3} a cărei ecuație este

$$\|\xi^h\| = R^2 \quad (h = 1, \dots, p+1) \quad (1)$$

unde în membrul întâi se sumează în raport cu h de la 1 la $p+1$, iar ξ^h sînt pseudo-cuaternioni

$$\xi^h = v^{4h-3} + iv^{4h-2} + jv^{4h-1} + kv^{4h}$$

Fie de asemenea ecuația simplectică

$$\xi^h d\xi^h = 0 \quad (2)$$

și să considerăm spațiul Q_{p+1} ale cărui elemente sînt vectorii

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{p+1})$$

și dotat cu grupul simplectic

$$\xi'^h = a_m^h \xi^m \quad (m = 1, \dots, p+1) \quad (3)$$

unde a_m^h sînt pseudo-cuaternioni ce satisfac relațiile de ortogonalitate

$$\bar{a}_m^h a_n^h = \delta_m^n \quad (n = 1, \dots, p+1) \quad (4)$$

Dacă punem

$$a_m^h = \alpha_m^h + i\beta_m^h + j\gamma_m^h + k\lambda_m^h$$

obținem relațiile

$$\begin{aligned} \alpha_m^h \alpha_n^h + \beta_m^h \beta_n^h - \gamma_m^h \gamma_n^h - \lambda_m^h \lambda_n^h &= \delta_m^n \\ \alpha_m^h \beta_n^h - \alpha_n^h \beta_m^h + \gamma_m^h \lambda_n^h - \gamma_n^h \lambda_m^h &= 0 \\ \alpha_m^h \alpha_n^h - \alpha_n^h \gamma_m^h + \beta_m^h \lambda_n^h - \beta_n^h \gamma_m^h &= 0 \\ \alpha_m^h \lambda_n^h - \alpha_n^h \lambda_m^h + \gamma_m^h \beta_n^h - \gamma_n^h \beta_m^h &= 0 \end{aligned}$$

primele în număr de $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$, iar fiecare din ultimele trei în număr de $\frac{1}{2}p(p+1)$. Deoarece avem în total $4(p+1)^2$ cantități $\alpha_m^h, \beta_m^h, \gamma_m^h, \lambda_m^h$ rezultă că independente sînt numai

$$4(p+1)^2 - \frac{1}{2}(p+1)(p+2) - \frac{3}{4}p(p+1) = (p+1)(2p+3)$$

Deci grupul (4) este un $G_{2p+5p+3}^2$.

În spațiul Q_{p+1} se poate introduce produsul scalar a doi vectori $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{p+1})$, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{p+1})$ prin formula

$$(\xi, \eta) = \bar{\xi}^h \eta^h \quad (5)$$

deoarece această expresie este un invariant al grupului (3), (4), într-adevăr, dacă ξ'^h este dat de (3), iar η'^h este dat de formula

$$\eta'^h = a_n^h \eta^n \quad (3')$$

atunci din (3) (3'), (4) avem succesiv

$$(\xi', \eta') = \bar{\xi}'^h \eta'^h = (\bar{\xi}^m a^m)(\bar{a}_m^h \eta^h) = \bar{\xi}^m \delta_m^n \eta^n = \bar{\xi}^m \eta^m = (\xi, \eta)$$

Rezultă că Q_{p+1} este un spațiu vectorial pseudo-cuaternionic posedînd metrica nedefinită

$$(d\xi, d\xi) = \|d\xi^h\|^2$$

În Q_{p+1} putem, de asemenea, defini un subspațiu neolonom invariant într-adevăr varietatea Q_{p+1}^p formată din totalitatea elementelor

$$(\xi^1, \dots, \xi^{p+1}; d\xi^1, \dots, d\xi^{p+1})$$

care satisfac relației

$$(\xi, d\xi) = \bar{\xi}^h d\xi^h = 0 \quad (6)$$

este un invariant al grupului (3) (4), deoarece avem succesiv

$$(\xi', d\xi') = \bar{\xi}'^h d\xi'^h = (\bar{\xi}^m \bar{a}_m^h)(a_n^h d\xi^n) = \bar{\xi}^m \delta_m^n d\xi^n = \bar{\xi}^m d\xi^m = (\xi, d\xi)$$

Să considerăm un element liniar oarecare $(\xi^1, \xi^{p+1}; d\xi^1, d\xi^{p+1})$ și să căutăm o descompunere a vectorului $d\xi^h$ într-o sumă

$$d\xi^h = d\xi_0^h + d\xi_1^h \quad (7)$$

astfel ca vectorul $d\xi_1^h$ să aparțină spațiului neolonom Q_{p+1}^p , deci să avem

$$(\xi, d\xi_1) = 0 \quad (8)$$

și astfel ca vectorii $d\xi_0^h, \xi^h$ să fie coliniari, adică să avem

$$d\xi_0^h = \xi^h d\varphi \quad (9)$$

unde $d\varphi$ este un pseudo-cuaternion. Punind în (8)

$$d\xi_1^h = d\xi^h - \xi^h d\varphi, \quad d\bar{\xi}_1^h = d\bar{\xi}^h - d\varphi \cdot \bar{\xi}^h$$

obținem condiția

$$(\xi, d\xi - \xi d\varphi) = 0 \quad (8')$$

de unde rezultă că avem pentru $d\varphi$ expresia

$$d\varphi = \frac{(\xi, d\xi)}{(\xi, \xi)} \quad (10)$$

iar vectorii $d\xi_0^h, d\xi_1^h$ sînt dați de formulele

$$d\xi_0^h = \xi^h \frac{(\xi, d\xi)}{(\xi, \xi)}, \quad d\xi_1^h = d\xi^h - \xi^h \frac{(\xi, d\xi)}{(\xi, \xi)} \quad (11)$$

Se poate verifica ușor că vectorii $d\xi_0^h, d\xi_1^h$ definiți de (11) sînt ortogonali, adică avem

$$(d\xi_0, d\xi_1) = 0 \quad (12)$$

De asemenea, din (12) rezultă relația

$$(d\xi, d\xi) = (d\xi_0, d\xi_0) + (d\xi_1, d\xi_1) \quad (13)$$

care împreună cu (12) ne permite a enunța următorul rezultat:

Orice vector $d\xi = (d\xi^1, \dots, d\xi^{p+1})$ cu originea în punctul $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{p+1})$ se poate descompune într-o sumă de doi vectori ortogonali $d\xi_0, d\xi_1$ dați de (11), din care primul este coliniar cu vectorul ξ , iar al doilea aparține spațiului neolonom Q_{p+1}^p .

Fie acum sistemul Pfaff în variabile pseudo-cuaternionice

$$d\xi_1^h = d\xi^h - \xi^h d\varphi = 0 \quad (14)$$

unde $d\varphi$ este dat de (1). În (14) avem numai p relații independente, deoarece dacă înmulțim (14) la stînga cu $\bar{\xi}^h$ și sumăm, obținem relația (10). Sistemul (14) admite soluția

$$\xi^\alpha = \eta^\alpha \xi, \quad \xi^{p+1} = \xi \quad (\alpha = 1, \dots, p) \quad (15)$$

unde η^α sînt constante de integrare și ξ un parametru pseudo-cuaternionic. Deoarece (14) este echivalent cu un sistem Pfaff, format din $4p$ ecuații în variabilele reale $v^1, \dots, v^{4p+4}$, rezultă că integrala generală în (14) depinde de cel mult $4p$ constante reale arbitrare, deci formulele (15) ne dau integrala generală a sistemului (14), întrucît ele conțin p constante pseudo-cuaternionice arbitrare, deci $4p$ constante reale arbitrare.

Dacă notăm cu V varietatea formată de integralele I ale sistemului (14), putem considera cantitățile η^α din (15) drept coordonate pseudo-cuaternionice în vecinătatea varietații V , care conține numai integrale, pentru care avem $\xi^{p+1} \neq 0$.

Varietatea V se poate deci acoperi cu $p + 1$ vecinătăți, deoarece nu toate mărimile ξ^h sînt nule pentru un același I și dacă pentru un element din V avem $\xi^{h_0} \neq 0$, acest element aparține unei vecinătăți, ce se poate defini prin formule analoge cu (15). Fie I, I' două integrale infinit vecine ale sistemului (14), unde putem presupune că I este dată de (15), iar I' este dată de formulele

$$\xi^\alpha = (\eta^\alpha + d\eta^\alpha) \xi, \quad \xi^{p+1} = \xi \quad (15')$$

$d\eta^\alpha$ fiind pseudo-cuaternioni infinitezimali. Fie apoi un vector infinitezimal $d\xi^h$, cu originea în punctul $P(\xi^h)$ din I și cu extremitatea în punctul $P'(\xi^h + d\xi^h)$ din I' , deci dacă ξ^h sînt dați de (15), atunci $\xi^h + d\xi^h$ sînt dați de

$$\xi^\alpha + d\xi^\alpha = (\eta^\alpha + d\eta^\alpha) (\xi + d\xi), \quad \xi^{p+1} + d\xi^{p+1} = \xi + d\xi, \quad (16)$$

Să arătăm că dacă punctul P se găsește pe cuadrica (1) și dacă elementul $(\xi^h, d\xi^h)$ aparține spațiului neolonom Q_{p+1}^p , deci dacă avem (2), atunci forma pătratică

$$ds^2 = (d\xi, d\xi) = \|d\xi^h\|^2 \quad (17)$$

depinde numai de p pseudo-cuaternioni independenți și de diferențialele lor. Trebuie să arătăm, mai întâi, că relațiile (1) (2) definesc în mod unic punctul $P'(\xi^h + d\xi^h)$, dacă se dă punctul $P(\xi^h)$. Din (15), (16) rezultă

$$d\xi^\alpha = d\eta^\alpha \cdot \xi + \eta^\alpha d\xi, \quad d\xi^{p+1} = d\xi \quad (18)$$

iar din (1) (15) obținem

$$\|\xi\| = \frac{R^2}{1 + \rho} \quad (19)$$

unde am notat

$$\rho = \|\eta^\alpha\|^2 \quad (20)$$

Ținînd seama de (18) în (2), obținem

$$d\xi = -\frac{\bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha \cdot \xi}{1 + \rho} \quad (21)$$

astfel încît formulele (18) și (21) definesc deplasarea $d\xi$, deci punctul P' dacă punctul P este dat.

Înlocuind (18), (21) în (17), rezultă în definitiv formula

$$dS^2 = R^2 \left[\frac{\|d\eta^\alpha\|^2}{1 + \rho} - \frac{\|\bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha\|^2}{(1 + \rho)^2} \right] \quad (22)$$

unde $\|\bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha\|^2$ este pătratul seminormei lui $\bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha$, deci avem

$$\|\bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha\|^2 = \bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha d\bar{\eta}^\beta \eta^\beta$$

și se vede că metrica (22) depinde numai de pseudo-cuaternionii $\eta^1, \dots, \eta^p$. Deci, varietatea V a integralelor (15) ale sistemului (14) posedă metrica invariantă (22), care depinde numai de p pseudo-cuaternioni și de diferențialele lor. Forma (22) se poate, de asemenea, privi ca metrica indusă de metrica spațiului Q_{p+1}

$$d\sigma^2 = (d\xi, d\xi) = \|d\xi^h\|^2 \quad (23)$$

pe subspațiul neolonom Q_{p+1}^p definit de ecuațiile (1) (2).

Într-adevăr, dacă efectuăm în Q_{p+1} transformarea de variabile (15), în care ξ, η^α sînt noile variabile, ecuațiile (1) (2), devin respectiv ecuațiile (19) (21), iar pe de altă parte dacă diferențiem (15) obținem relațiile (18), care introduse în (23) și ținînd seama de (19), (21), ne conduc la metrica (22).

Deci, metrica (23) din spațiul Q_{p+1} induce pe subspațiul neolonom Q^p definit de ecuațiile (1) (2), o metrică ce depinde numai de p pseudo-cuaternioni independenți și de diferențialele lor și această metrică se reduce la forma (22), dacă utilizăm transformarea (15).

2. — DEFINIREA PARALELISMULUI LEVI-CIVITA PE SPAȚIUL Q^p .

În cele ce urmează vom arăta cum se poate defini un paralelism, analog paralelismului lui Levi-Civita de pe subspațiile unui spațiu euclidian, pe subspațiul neolonom Q^p definit de ecuațiile (1) (2).

Fie, pentru aceasta, $P(\xi^h)$ un punct satisfăcînd (1) și $u^h = d\xi^h$ un vector tangent variatății Q^p , deci avem

$$\bar{\xi}^h u^h = 0$$

Vectorul u^h este dat de relațiile (18), (21)

$$u^\alpha = a^\alpha \xi + \eta^\alpha \Omega, \quad u^{p+1} = \Omega \quad (24)$$

unde am notat pentru simplificare

$$a^\alpha = d\eta^\alpha, \quad \Omega = -\frac{\bar{\eta}^\alpha a^\alpha \xi}{1 + \rho} \quad (25)$$

Dacă $P'(\xi^h + \delta\xi^h)$ este un punct infinit vecin de $P(\xi^h)$ astfel ca vectorul $\delta\xi^h$ să fie tangent variatății Q^p , atunci avem formule de forma

$$\delta\xi^\alpha = \delta\eta^\alpha \cdot \xi - \eta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma \delta\eta^\sigma \cdot \xi}{1 + \rho}, \quad \delta\xi^{p+1} = -\frac{\bar{\eta}^\sigma \delta\eta^\sigma \cdot \xi}{1 + \rho} = \delta\xi(\delta = 1, \dots, p), \quad (26)$$

Să căutăm acum să determinăm un vector $u^h + \delta u^h$, tangent în P' spațiului neolonom Q^p , astfel ca δu^h să fie ortogonal fiecărui vector χ^h tangent în P lui Q^p , deci pentru orice χ satisfăcînd relației

$$\bar{\xi}^h \chi^h = 0 \quad (27)$$

trebuie să avem

$$\delta \bar{u}^h \cdot x^h = 0 \quad (28)$$

În particular, pentru $\chi^h = u^h$, avem

$$\delta \bar{u}^h \cdot u^h = 0, \quad \bar{u}^h \delta u^h = 0$$

și atunci rezultă

$$(\bar{u}^h + \delta \bar{u}^h) (u^h + \delta u^h) = \bar{u}^h u^h$$

sau în definitiv

$$(u + \delta u, u + \delta u) = (u, u) \quad (29)$$

deci lungimea vectorului u se păstrează.

În virtutea relației (26), vectorul χ^h se poate exprima sub forma

$$\chi^\alpha = \omega^\alpha \xi - \eta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma \omega^\sigma \xi}{1 + \rho}, \quad \chi^{p+1} = -\frac{\bar{\eta}^\sigma \omega^\sigma \xi}{1 + \rho} \quad (30)$$

unde ω sînt pseudo-cuaternioni ce depind de χ^h .

Ținînd seama de (24) și (30), condiția (28) se scrie sub forma

$$(\bar{\xi} \delta \bar{a}^\alpha + \delta \bar{\xi} \cdot \bar{a}^\alpha + \bar{\Omega} \delta \bar{\eta}^\alpha + \delta \bar{\Omega} \cdot \bar{\eta}^\alpha) \left(\omega^\alpha \xi - \eta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma \omega^\sigma \xi}{1 + \rho} \right) - \delta \bar{\Omega} \frac{\bar{\eta}^\sigma \omega^\sigma \xi}{1 + \rho} = 0$$

de unde obținem, prin simplificare cu ξ la dreapta și dînd factor comun la dreapta pe ω^σ , relația

$$\left[(\delta \bar{\xi} \cdot \bar{a}^\alpha + \bar{\xi} \delta \bar{a}^\alpha + \bar{\Omega} \delta \bar{\eta}^\alpha + \delta \bar{\Omega} \cdot \bar{\eta}^\alpha) \left(\delta_j^\alpha - \eta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma}{1 + \rho} \right) - \delta \bar{\Omega} \cdot \frac{\bar{\eta}^\sigma}{1 + \rho} \right] \omega^\sigma = 0. \quad (31)$$

Cantitățile ω^σ fiind arbitrare, iar coeficientul lui $\delta \bar{\Omega}$ fiind egal cu zero, așa cum se poate constata ușor, din (31) obținem

$$(\delta \bar{\xi} \cdot \bar{a}^\alpha + \bar{\Omega} \delta \bar{\eta}^\alpha + \bar{\xi} \delta \bar{a}^\alpha) \left(\delta_\alpha^\sigma - \eta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma}{1 + \rho} \right) = 0 \quad (32)$$

unde se sumează în raport cu α de la 1 la p , iar relațiile (32) au loc pentru $\sigma = 1, \dots, p$.

Dacă facem notațiile

$$A^\alpha = \delta \bar{\xi} \cdot \bar{a}^\alpha + \bar{\Omega} \delta \bar{\eta}^\alpha + \bar{\xi} \delta \bar{a}^\alpha, \quad h_\alpha^\sigma = \delta_\alpha^\sigma - \eta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma}{1 + \rho}$$

relațiile (32) se scriu

$$A^\alpha h_\alpha^\sigma = 0 \quad (32')$$

și deoarece (32') constituie un sistem liniar și omogen de p ecuații cu p nedeterminate A^α , pentru care determinantul $|h_\alpha^\sigma| \neq 0$ rezultă că acest sistem admite numai soluția banală $A^\alpha = 0$, deci avem

$$\bar{\xi} \delta \bar{a}^\alpha = -\delta \bar{\xi} \cdot \bar{a}^\alpha - \bar{\Omega} \delta \bar{\eta}^\alpha \quad (33)$$

Ținând seama de (25) și de ultima relație (26), obținem

$$\bar{\xi} \delta \bar{a}^\sigma = \frac{\bar{\xi} \delta \bar{\eta}^\sigma \cdot \bar{\eta}}{1 + \rho} \bar{a}^\alpha + \frac{\bar{\xi} \bar{a}^\sigma \bar{\eta}^\gamma}{1 + \rho} \delta \bar{\eta}^\alpha$$

de unde rezultă prin simplificare cu $\bar{\xi}$ la stînga și prin conjugare,

$$\delta a^\alpha = a^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma \delta \eta^\sigma}{1 + \rho} + \delta \eta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma a^\sigma}{1 + \rho} \quad (34)$$

relații ce constituie ecuațiile de paralelism.

Ecuatiile (34) se mai pot scrie sub forma

$$\delta a^\alpha = a^\beta \Phi_{\beta\sigma}^\alpha \delta \eta^\sigma + \delta \eta^\beta \psi_{\beta\sigma}^\alpha a^\sigma \quad (35)$$

unde am notat

$$\Phi_{\beta\sigma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma}{1 + \rho}, \quad \psi_{\beta\sigma}^\alpha = \Phi_{\beta\sigma}^\alpha \quad (36)$$

3. — ECUAȚIILE DE PARALELISM ALE METRICII SPAȚIULUI V_{4p} .

Fie Q^p un spațiu pseudo-cuaternionic avînd metrica (22) și a^α un vector din Q^p cu originea în punctul $P(\eta^\alpha)$. Lungimea lui este dată de formula

$$l^2 = R^2 \bar{a}^\alpha g_{\alpha\beta} a^\beta \quad (37)$$

coeficienții $g_{\alpha\beta}$ fiind dați de formulele

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\delta_\alpha^\beta}{1 + \rho} - \frac{\eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}{(1 + \rho)^2} \quad (38)$$

Să considerăm acum un punct $P'(\eta^\alpha + \delta \eta^\alpha)$ infinit vecin cu $P(\eta^\alpha)$ și să căutăm să găsim în P' un vector $a^\alpha + \delta a^\alpha$, astfel ca lungimea lui $a^\alpha + \delta a^\alpha$ să fie egală cu lungimea vectorului a^α și astfel ca variația δa^α să fie dată de formule de forma (35). Vom pune în plus condiția ca paralelismul (35) să fie fără torsiune, deci să avem pentru doi operatori d , δ , arbitrari

$$d \delta \eta^\alpha = \delta d \eta^\alpha \quad (39)$$

unde $d \delta \eta^\alpha$ este variația pe care o suferă vectorul $\delta \eta^\alpha$, cînd îl transportăm prin paralelism în direcția $d \eta^\alpha$.

Ținînd seama că avem din (35)

$$\delta d\eta^\alpha = d\eta^\beta \Phi \delta \eta^\sigma + \delta \eta^\beta \psi_{\beta\sigma}^\alpha d\eta^\sigma$$

condițiile (39) se scriu

$$\delta \eta^\beta \psi_{\beta\sigma}^\alpha d\eta^\sigma + d\eta^\beta \psi_{\beta\sigma}^\alpha \delta \eta^\sigma = d\eta^\beta \Phi_{\beta\sigma}^\alpha \delta \eta^\sigma + \delta \eta^\beta \psi_{\beta\sigma}^\alpha d\eta^\sigma$$

de unde rezultă că trebuie să avem

$$\Phi_{\beta\sigma}^\alpha = \psi_{\beta\sigma}^\alpha \quad (40)$$

Diferențiind formula (37), obținem

$$2l\delta l = R^2(\delta \bar{a}^\alpha g_{\alpha\beta} a^\beta + \bar{a}^\alpha \delta g_{\alpha\beta} v^\beta + \bar{a}^\alpha g_{\alpha\beta} \delta a_\beta), \quad (41)$$

iar din (38) avem prin diferențiere

$$\delta g_{\alpha\beta} = -2 \frac{\delta^\beta}{(1+\rho)^2} \operatorname{Re}(\bar{\eta}^\gamma \delta \eta^\sigma) - \frac{\eta^\alpha \delta \bar{\eta}^\beta + \delta \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}{(1+\rho)^2} + 4 \frac{\eta_\alpha \bar{\eta}^\beta}{(1+\rho)^3} \operatorname{Re}(\bar{\eta}^\sigma \delta \eta^\sigma), \quad (38')$$

unde $\operatorname{Re}(x)$ înseamnă partea reală a pseudo-cuaternionului x .

Dacă ținem seama de relațiile (34), (38), (38') în (41), obținem în definitiv

$$\delta l = 0 \quad (42)$$

relație care ne arată că paralelismul definit de formulele (35), (36) păstrează lungimile vectorilor a^α date de (37) și (38)

Pe de altă parte, metrica (37) (38) nu poate poseda două paralelisme fără torsiune distincte. Într-adevăr, să considerăm cazul general cînd metrica (37) (38), ar poseda două paralelisme de forma

$$da^\alpha = a^\beta du_\beta^\alpha + \bar{a}^\beta dv_\beta^\alpha + d\bar{w}_\beta^\alpha \cdot a^\beta + dt_\beta^\alpha \cdot \bar{a}^\beta \quad (43)$$

în care du_β^α , dv_β^α , $d\bar{w}_\beta^\alpha$, dt_β^α sînt forme liniare de diferențialele $d\eta^\alpha$, $d\bar{\eta}^\alpha$.

Dacă introducem variabilele reale $z^1, \dots, z^{4p}$ prin formulele

$$\eta^\alpha = z^{4\alpha-3} + iz^{4\alpha-2} + jz^{4\alpha-1} + kz^{4\alpha} \quad (44)$$

obținem relațiile

$$\begin{aligned} \rho &= \|\eta^\alpha\|^2 = \varepsilon_r (z^{4\alpha-r})^2 = z, \quad \|d\eta^\alpha\|^2 = \varepsilon_r (dz^{4\alpha-r})^2 \\ \bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha &= \varepsilon_r z^{4\alpha-r} dz^{4\alpha-r} - i\omega + j\omega_1 - k\omega_2, \quad d\bar{\eta}^\alpha \cdot \eta^\alpha = \\ &= \varepsilon^r z^{4\alpha-r} dz^{4\alpha-r} + i\omega - j\omega_1 + k\omega_2 \\ \|\bar{\eta}^\alpha d\eta^\alpha\|^2 &= (\beta_r z^{4\alpha-r} dz^{4\alpha-r}) + \omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 \end{aligned}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} \omega &= [z^{4\alpha-2} z^{4\alpha-3}] + [z^{4\alpha} z^{4\alpha-1}], \quad \omega_1 = [z^{4\alpha-3} z^{4\alpha-1}] + [z^{4\alpha-2} z^{4\alpha}], \\ \omega_2 &= [z^{4\alpha} z^{4\alpha-3}] + [z^{4\alpha-2} z^{4\alpha-1}], \quad [z^a z^b] = z^a dz^b - z^b dz^a \end{aligned}$$

$$\varepsilon_r = \begin{cases} -1, & \text{pentru } r = 0, 1 \\ +1, & \text{pentru } r = 2, 3 \end{cases}$$

Metrica (22) a spațiului Q^p devine metrica spațiului simetric V_{4p}

$$dS^2 = R^2 \left[\frac{\varepsilon_r (dz^{4\alpha-r})^2}{1+z} - \frac{(\varepsilon_r z^{4\alpha-r} dz^{4\alpha-r})^2 + \omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}{(1+z)^2} \right] \quad (45)$$

unde în membrul al doilea se sumează în raport cu indicii α și r .

Exprimînd apoi vectorul a^α cu ajutorul a $4p$ componente reale

$$a^\alpha = u^{4\alpha-3} + iu^{4\alpha-2} + ju^{4\alpha-1} + ku^{4\alpha}, \quad (\alpha = 1, \dots, p), \quad (46)$$

formulele (43) devin ecuațiile de paralelism ale metricii (45).

Cum această metrică nu poate să posedă două paralelisme distincte, putem enunța următoarea

Teoremă. Ecuațiile (34) constituie formulele de paralelism ale metricii (22), iar dacă în (34) facem substituțiile (44), (46), atunci aceste ecuații definesc paralelismul lui Levi-Civita al spațiului simetric V_{4p} , care posedă metrica (45).

Să transportăm acum vectorul a^α , utilizînd formulele (34), de-a lungul unui circuit infinitezimal închis, definit de operatorii d , δ . Obținem formulele

$$Da^\alpha = (\delta\eta^\sigma d\bar{\eta}^\sigma - d\eta^\sigma \delta\bar{\eta}^\sigma) \Gamma_{\sigma\tau\gamma}^\alpha a^\gamma + a^\alpha \Delta, \quad (47)$$

unde am notat

$$\Gamma_{\sigma\tau\gamma}^\alpha = \delta_\sigma^\alpha \left[\frac{\delta_\tau^\sigma}{1+\rho} - \frac{\eta^\tau \bar{\eta}^\gamma}{(1+\rho)^2} \right] \quad (48)$$

$$\Delta = \frac{\bar{\eta}^\tau d\eta^\tau \bar{\eta}^\sigma d\eta^\sigma - \bar{\eta}^\tau \delta\eta^\tau \bar{\eta}^\sigma d\eta^\sigma}{(1+\rho)^2} + \frac{d\bar{\eta}^\sigma \delta\eta^\sigma - d\bar{\eta}^\sigma d\eta^\sigma}{1+\rho} \quad (49)$$

iar D este operatorul definit prin formula

$$Da^\alpha = d\delta a^\alpha - \delta da^\alpha$$

Comparînd (38) și (48) se vede că avem

$$\Gamma_{\sigma\tau\gamma}^\alpha = \delta_\sigma^\alpha g_{\tau\gamma} \quad (48')$$

Din relațiile (47) rezultă că dacă transportăm un vector a^α cu originea în punctul $O(\eta^\alpha = 0)$ în jurul unui ciclu infinitezimal închis, vectorul a^α suferă o transformare infinitezimală definită de formula

$$Da^\alpha = \omega_\gamma^\alpha a^\gamma + a^\alpha \omega$$

unde am notat

$$\omega_\gamma^\alpha = \delta n^\alpha d\bar{\eta}^\gamma - d\eta^\alpha \delta\bar{\eta}^\gamma, \quad \omega = d\bar{\eta}^\sigma \delta\eta^\sigma - \delta\bar{\eta}^\sigma d\eta^\sigma$$

cantitățile ω_γ^α , ω verificînd ecuațiile

$$\omega_\gamma^\alpha + \bar{\omega}_\alpha^\gamma = 0, \quad \omega + \bar{\omega} = 0$$

Ne propunem acum să găsim subgrupul de stabilitate al punctului $O(\eta^\alpha = 0)$. Pentru aceasta vom face în (3) schimbarea de variabile definită de relațiile (15). Obținem formulele

$$\eta'^\alpha (a_\beta^{p+1} \eta^\beta + a_{p+1}^{p+1}) = a_\beta^\alpha \eta^\beta + a_{p+1}^\alpha \quad (3')$$

Transformarea (3') păstrează punctul $O(\eta^\alpha = 0)$ dacă avem condițiile

$$a_{p+1}^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p)$$

de care ținem seama în (4) și obținem

$$a_\beta^{p+1} = 0, \quad \|a_{p+1}^{p+1}\| = 1 \quad (\beta = 1, \dots, p)$$

astfel încât formulele (3') se mai scriu

$$\eta'^\alpha a_{p+1}^{p+1} = a_\beta^\alpha \eta^\beta$$

iar dacă înmulțim la dreapta cu $\bar{a}_{p+1}^{p+1}$, obținem în definitiv

$$\eta'^\alpha = a_\beta^\alpha \eta^\beta q, \quad (\|q\| = 1, \quad q = \bar{a}_{p+1}^{p+1}, \quad \bar{a}_\beta^\alpha a_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha)$$

și aceste formule ne definesc subgrupul de stabilitate al punctului $O(\eta^\alpha = 0)$

4. — GEODEZICELE SPAȚIILOR Q^p ȘI ALE SPAȚIILOR V_{4p}

Se numește geodezică a spațiului Q^p avînd metrica (22) o curbă formată din puncte ale căror coordonate $\eta^1, \dots, \eta^p$ sînt funcții de un parametru real t și pentru care vectorul tangent $\dot{\eta}^\alpha$ se transportă prin paralelismul (34), cînd ne deplasăm pe curbă. Geodezicele se obțin punînd în (34)

$$a^\alpha = \dot{\eta}^\alpha, \quad \delta \eta^\alpha = a^\alpha \delta t, \quad \delta a^\alpha = \dot{\eta}^\alpha \delta t$$

unde $\dot{\eta}^\alpha$, $\ddot{\eta}^\alpha$ sînt derivatele prime și secunde ale funcțiilor η^α în raport cu parametrul t . Obținem atunci ecuațiile

$$\ddot{\eta}^\alpha = 2\dot{\eta}^\alpha \frac{\bar{\eta}^\sigma \dot{\eta}^\sigma}{1 + \rho} \quad (50)$$

Dacă facem transformarea (44), geodezicele date de (50) devin geodezicele spațiului V_{4p} , metrica (45).

Dacă punem

$$\eta^\alpha = \operatorname{tg} \frac{S}{R} \eta_0^\alpha, \quad \dot{\eta}^\alpha = \frac{1}{R} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{S}{R} \right) \eta_0^\alpha, \quad \ddot{\eta}^\alpha = \frac{2}{R^2} \operatorname{tg} \frac{S}{R} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{S}{R} \right) \eta_0^\alpha, \quad (51)$$

unde η_0^α sînt pseudo-cuaternioni constanți care satisfac relația

$$\|\eta_0^\alpha\| = 1 \quad (\text{sumare după } \alpha)$$

atunci se poate arăta ușor că ecuațiile (50) sînt satisfăcute.

Rezultă că geodezicele ce trec prin origine ale metricii (45) sînt drepte

$$z^l = z_0^l \operatorname{tg} \frac{s}{R} \quad (l = 1, \dots, 4p) \quad (51')$$

unde s este arcul pe aceste geodezice.

BIBLIOGRAFIE

1. — G. h. V r ă n c e a n u: „Lecții de geometrie diferențială”, vol. I, pag. 261 — 262, Editura didactică și pedagogică, Buc, 1962.
2. — G. h. V r ă n c e a n u: „Lecții de geometrie diferențială”, vol III, pag. 298—314, Editura Acad. R.P.R., 1960.
3. — G. h. V r ă n c e a n u: „Lucrările sesiunii Riemann”, Berlin, 1954.
4. — E. C a r t a n: „Oeuvres complètes”, volumul I, partea II, p. 400—403, Paris, Gauthier-Villars, 1953.
5. — C. T e l e m a n: „Asupra grupurilor de mișcare maximă ale spațiilor riemanniene V_n ”. Studii și cercetări matematice, t. V. nr. 1—2, ianuarie-iunie 1954, p. 143.
6. — C. T e l e m a n: „Sur certains espaces symétriques”, Buletin Scientifique, Acad. R.P.R., t. VII, nr. 4, 1955, p. 977—1002.
7. — C. T e l e m a n: „Sur une classe d'espaces riemanniens symétriques. Revue de Math. pures et appliquées, tome II, 1957, p. 445—470.
8. — Б. А. Р о з е н ф е л ь д: „Неевклидовы геометрии”, Москва, 1955
9. — R. B e r g e r: „Les espaces symétriques non compacts.” Ann. de l'Ec. Norm. Sup., 1957, (47), p. 85—117.

Primită la redacție la 24. II. 1970.

Institutul politehnic, București

О КЛАССЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ V_{4p} СО ЗНАКОНЕОПРЕДЕЛЕННОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ

Краткое содержание

В настоящей работе рассматривается класс симметрических римановых пространств V_{4p} со законоопределенной метрической формой, имеющий одну некоплектно простую группу движения Ли $G_{2p+5p+3}$ из класса С. Киллинга.

Эти пространства определены как неголономные многообразия V_{4p}^{4p+3} ба квадратике C_{4p+3} из псевдоевклидовых пространств F_{4p+4} с помощью одной системы трех уравнений Пфаффа.

Определяется, затем, параллелизм Леви-Чивита пространства V_{4p} в псевдокватернионных и находятся дифференциальные уравнения геодезических линий.

SUR UNE CLASSE D'ESPACES SYMETRIQUES V_{4p} À MÉTRIQUE INDEFINIE

Résumé

On considère une classe d'espaces de Riemann V_{4p} dont le groupe de mouvement est un groupe simple non compacte G_{2p^2+5p+3} de la classe C de Killing, qui-dans les variables pseudo-quaternioniques coïncident-localement à un espace Q^p à forme hermitique unitaire. Ces espaces sont définis, par un système de trois équations de Pfaff, comme des variétés non holonomes V_{4p+3}^{4p} situées sur une aquadrique C_{4p+3} de l'espace plat F_{4p+4} .

On définit aussi un parallélisme Levi — Civita sur l'espace non holonome invariant Q^p et l'on trouve les équations différentielles des géodésiques des espaces considérées.

CRITERII DE CONVERGENȚĂ A. S. A ȘIRURILOR DE APLICAȚII NEMĂSURABILE

N. MICU

Fie $(\Omega, \mathfrak{X}, P)$ un câmp de probabilitate și $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de aplicații ale lui Ω într-o mulțime X . Deoarece în cele ce urmează nu avem nevoie decât de o distanță în X și de criteriul lui Cauchy pentru convergența în raport cu această distanță, vom considera că (X, d) este un spațiu metric complet.

Definiție. Spunem că șirul (f_n) converge a. s. către aplicația f a lui Ω în X , dacă există $A \in \mathfrak{X}$ $P(A) = 1$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

pentru orice $\omega \in A$.

Evident, este valabil criteriul lui Cauchy pentru acest tip de convergență a.s.

Dacă $(\Omega, \mathfrak{X}, P)$ este un câmp complet de probabilitate, atunci șirul $(f_n)_n$ converge a.s. dacă mulțimea punctelor sale de convergență aparține lui $\mathfrak{X}$ și are probabilitatea egală cu unitatea.

Pentru convergența a.s. a șirurilor de aplicații nemăsurabile păstrăm notațiile obișnuite ale convergenței a.s. a șirurilor de variabile aleatoare.

Pentru teoremele care urmează avem nevoie de următoarea

Lemă. Dacă $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$ și

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^*(\Omega_n) < \infty$$

atunci

$$P^*(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n}) = 0$$

unde $P^*(\Omega_0)$ este probabilitatea exterioară a lui $\Omega_0 \subset \mathfrak{Z}(\Omega)$

Demonstrație. Este evident, o generalizare a primei părți a teoremei lui Borel-Cantelli.

Pentru orice $n \in N$, există $A_n \in \mathfrak{K}$,

$$A_n \supset \Omega_n, P^*(\Omega_n) = P(A_n)$$

În aceste condiții

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \Omega_n \subset \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n \in \mathfrak{K}$$

și deci

$$P^*(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \Omega_n) \leq P(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n) \quad (1)$$

Pe de altă parte, deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P^*(\Omega_n) < \infty$$

avem (Borel-Cantelli):

$$P(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n) = 0$$

și ținând cont de (1)

$$P^*(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \Omega_n) = 0$$

Teorema 1. Dacă $(f_n)_{n \in N}$ este un șir de aplicații $\Omega \rightarrow X$ pentru care există șirul de numere pozitive ε_n astfel ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^*(\{\omega; d(f_{n+1}^{(\omega)}, f_n^{(\omega)}) \geq \varepsilon_n\}) < \infty$$

atunci șirul (f_n) converge a.s.

Demonstrație. Notăm

$$\Omega_n = \{\omega; d(f_{n+1}^{(\omega)}, f_n^{(\omega)}) \geq \varepsilon_n\}$$

Din ipoteză și din lema precedentă, rezultă

$$P^*(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \Omega_n) = 0 \quad (2)$$

Fie $\omega \in \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \Omega_n$, fixat. Există $N = N(\omega)$ astfel ca pentru $k > N$ să avem

$$d(f_{k+1}^{(\omega)}, f_k^{(\omega)}) < \varepsilon_k$$

Dacă $m > n > N$, atunci

$$d(f_m^{(\omega)}, f_n^{(\omega)}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(f_{k+1}^{(\omega)}, f_k^{(\omega)})$$

sau, în baza relației (2):

$$d(f_m^{(\omega)}, f_n^{(\omega)}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} f(f_{k+1}^{(\omega)}, f_k^{(\omega)})$$

Făcînd $m, n \rightarrow \infty$ în această relație obținem

$$d(f_m^{(\omega)}, f_n^{(\omega)}) \rightarrow 0$$

adică șirul $(f_n^{(\omega)})_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy și deci convergent, deoarece am considerat că spațiul metric (X, d) este complet.

Rezultă că șirul $(f_n^{(\omega)})$ converge pentru orice $\omega \in (\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n)^c$ adică

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n)^c \subset \{\omega: f_n^{(\omega)} \text{ converge}\}$$

În consecință

$$P_*(\{\omega: f_n^{(\omega)} \text{ converge}\}) \geq P_*(\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n)^c = 1 - P^*(\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n) = 1.$$

și teorema este demonstrată.

În mod analog se demonstrează

Teorema 2. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^*(\{\omega: d(f_n^{(\omega)}, f(\omega)) \geq \varepsilon\}) < \infty$$

atunci șirul (f_n) converge a.s. către f .

Demonstrație. Notăm

$$\Omega_n = \Omega_n^\varepsilon = \{\omega: d(f_n^{(\omega)}, f(\omega)) \geq \varepsilon\}$$

Din ipoteză rezultă

$$P^*(\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n) = 0$$

Dacă $\omega \notin \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n$, atunci pentru orice $n > N(\varepsilon, \omega)$

$$d(f_n^{(\omega)}, f(\omega)) < \varepsilon$$

adică șirul $(f_n^{(\omega)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $f(\omega)$.

Rezultă că șirul f_n converge către f în afara mulțimii $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n$ și teorema este demonstrată.

Se observă că pentru teorema 2 nu este nevoie de ipoteza completitudinii spațiului metric considerat.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Neveu, Calcul des probabilités. Mason et C-ic, Editeurs, 1964.
2. O. Onicescu, Gh. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea, Calculul probabilităților și aplicații. Editura Academiei R.P.R., 1956.

**КРИТЕРИИ ПОЧТИ ТОЧНОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЯДОВ
НЕРАЗМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ****Краткое содержание**

В данной заметке обобщаются два критерия почти точной сходимости рядов случайных переменных почти точной сходимости рядов неразмёрных отображений, которые принимают значения в метрических пространствах.

**CRITÈRES POUR LA CONVERGENCE A. S.
DES SUITES D'APPLICATIONS NON-MESURABLES****Résumé**

Dans cette note on généralise deux critères de convergence p.s. des suites de variables aléatoires pour la convergence p. s. des suites des applications non-mesurables qui prennent leurs valeurs dans un espace métrique.

SUPRAFEȚE NEOLONOME ÎNTR-UN SPAȚIU NEEUCLIDIAN

N. MIHĂILEANU

1. Considerăm un spațiu neeuclidian, de formă invariantă

$$(1) \quad X^2 = (x^0)^2 + \varepsilon^2[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

unde $x^\lambda (\lambda = 0, 1, 2, 3)$ sînt coordonatele omogene ale punctului curent X ar ε^2 un număr real. Produsul scalar a două puncte $X(x^\lambda)$, $Y(y^\lambda)$ este

$$(2) \quad X \cdot Y = x^0 y^0 + \varepsilon^2(x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3).$$

Normăm coordonatele omogene x^λ astfel ca

$$(3) \quad X^2 = 1.$$

În acest spațiu considerăm ecuația diferențială

$$(4) \quad A \cdot dM = 0,$$

A fiind un vector dar iar $M(x^\lambda)$ un vector mobil. Cînd

$$(5) \quad A = \rho \text{ grad } f(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

(4) reprezintă suprafața s , de ecuație

$$f(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Cînd nu există o funcție f cu proprietatea (5) spunem că (4) reprezintă o suprafață neolonomă.

Indiferent de condiția (4), deci de faptul că suprafața s este olonomă sau neolonomă, putem să-i studiem proprietățile pe ecuația diferențială (4). Astfel, în primul rînd, ecuația planului tangent este dată de

$$(6) \quad A \cdot (X - M) = 0$$

2. Asociem ecuației (4) formele Pfaff

$$(7) \quad d\sigma_1 = A_1 \cdot dM, \quad d\sigma_2 = A_2 \cdot dM$$

astfel ca norma punctelor A, A_1, A_2 să fie nenulă

$$(8) \quad \overline{AA_1A_2} \neq 0.$$

Sistemele (4) și $d\sigma_1 = 0$, respectiv (4) și $d\sigma_2 = 0$ determină două congruențe de curbe situate pe suprafața s , care joacă rolul liniilor coordonate. Din (4) și (7) rezultă

$$(9) \quad dM = B_1 d\sigma_1 + B_2 d\sigma_2$$

unde

$$(10) \quad A \cdot B_1 = 0, \quad A_2 \cdot B_1 = 0; \quad A \cdot B_2 = 0, \quad A_1 \cdot B_2 = 0.$$

Obținem astfel prima formă fundamentală a suprafeței s

$$(11) \quad \varphi = \varepsilon^2 ds^2 = e_{11} d\sigma_1^2 + 2e_{12} d\sigma_1 d\sigma_2 + e_{22} d\sigma_2^2,$$

unde

$$(12) \quad e_{11} = B_1^2, \quad e_{12} = B_1 \cdot B_2, \quad e_{22} = B_2^2,$$

cu toate problemele ce rezultă din prima formă.

A doua formă fundamentală este

$$(13) \quad \psi = A \cdot d^2 M = -dA \cdot dM,$$

sau

$$(14) \quad \psi = l_{11} d\sigma_1^2 + (l_{12} + l_{21}) d\sigma_1 d\sigma_2 + l_{22} d\sigma_2^2$$

unde

$$(15) \quad l_{ij} = - \sum_{\lambda, \mu} \frac{\partial a^\lambda}{\partial x^\mu} b_i^\lambda b_j^\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2; \quad i, j = 1, 2).$$

iar $a^\lambda, b_1^\lambda, b_2^\lambda$ sînt coordonatele punctelor A, B_1, B_2 .

Rezultă de aici proprietățile legate de a doua formă fundamentală.

3. Condiția ca suprafața s să fie olonomă este dată de

$$(16) \quad l_{12} = l_{21}.$$

Unei suprafețe olonome putem să-i atașăm o suprafață neolonomă în modul următor. Fie M' ortogonalul punctului M al suprafeței olonome date, pe o rază a unei congruențe de drepte, dusă prin M ; forma

$$(17) \quad \iota = M' \cdot dM = idu + jdv$$

și punctul

$$(18) \quad dM^* = dM - \iota M'$$

care determină suprafața neolonomă s^* . Obținem o congruență de normale, deci suprafață olonomă, cînd are loc relația (16). Atunci ι este diferențială

exactă, deoarece

$$(19) \quad i_v - j_u = l_{12} - l_{21}$$

Rezultă printr-un procedeu invers, că putem să atașăm o suprafață olonomă unei suprafețe neolonome și să studiem suprafața neolonomă plecînd de la suprafața olonomă atașată.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Dobrescu. Geometrie diferențială. București, 1963.
2. N. Mihăileanu. Geometrie diferențială neeuclidiană. București 1964.
3. N. Mihăileanu. Despre forma lui Sannia. Analele Univ. București. Matematică-Mecanică, XIII, 1964, p. 37.
4. N. Mihăileanu. Suprafața neolonomă atașată unei congruențe de drepte într-un spațiu neeuclidian. Analele Univ. București. XV. 1966, p. 57.

Universitatea București
Facultatea de matematică—mecanică

Primită la redacție la 1 XII. 1969.

НОНГОЛОНОМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В НЕЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Краткое содержание

Другой метод рассмотрения этой задачи в евклидовом или неевклидовом пространстве может быть основан на присоединении к голономной поверхности некоторой неголономной, пользуясь обратной, процедурой, нежели это сделано в (4).

SURFACES NONHOLONOMES DANS UN ESPACE NONEUCLIDIEN

Résumé

On peut étudier une surface nonholonome dans un espace noneuclidien de la manière habituelle [1], en considérant les produits scalaires dans le sens de la métrique noneuclidienne [2].

Une autre manière d'envisager le problème dans un espace euclidien ou noneuclidien est d'attacher à la surface nonholonome considérée une surface holonome, en suivant un procédé inverse à celui indiqué dans [4]

It is a well-known fact that the American Medical Association has been a leading force in the development of the medical profession in this country. Its efforts have been directed towards the improvement of the medical education of its members, the advancement of the medical sciences, and the protection of the public interest.

MEMBERSHIP

The American Medical Association has a membership of over 50,000 physicians and surgeons. This membership is composed of members of the American Medical Association, members of the American Association of Colleges of Surgeons, and members of the American Association of Obstetricians and Gynecologists.

The American Medical Association has a long and distinguished history. It was founded in 1847, and has since that time been a leading force in the development of the medical profession in this country.

AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION JOURNAL

The American Medical Association Journal is a weekly publication which contains the latest news and information in the medical profession. It is a valuable source of information for all members of the medical profession.

AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION JOURNAL

The American Medical Association Journal is a weekly publication which contains the latest news and information in the medical profession. It is a valuable source of information for all members of the medical profession.

ASUPRA UNOR SPAȚII CU CARACTERISTICE DREPTE

LIVIU NICOLESCU

În această notă am considerat spațiile A_2 de speța a treia cu caracteristice drepte, cînd dreptele fac parte dintr-un fascicol. Cazul spațiilor A_2 de speța a treia cu caracteristice drepte paralele a fost studiat în [1], [2],

*

Un spațiu A_2 cu conexiune afină simetrică Γ_{jk}^i este de speța a treia dacă ecuația curbelor caracteristice [3], [4],

$$(1) \quad \Gamma_{11}^2 dx^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) dx^2 dy - (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) dx dy^2 - \Gamma_{22}^1 dy^3 = 0$$

admite o rădăcină triplă în $\frac{dy}{dx}$.

Cînd ecuația (1) admite o integrală liniară, familia respectivă de curbe caracteristice este constituită din drepte ([3], III pag. 149), spațiul A_2 fiind cu caracteristice drepte

* * *

Să considerăm fascicolul de drepte cu centrul în origine (ceea ce este totdeauna posibil, printr-o translație):

$$y = Cx$$

În acest caz ecuația (1) este de forma

$$(2) \quad (y - y'x)^3 = 0$$

Din (1) și (2), prin identificare, rezultă:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 3\rho xy^2 + 2g, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = f, & \Gamma_{22}^1 &= \rho x^3, \\ \Gamma_{11}^2 &= \rho y^3, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = g, & \Gamma_{22}^2 &= 3\rho x^2 y + 2f. \end{aligned}$$

Observăm că aceste spații depind, în general, de trei funcții arbitrare.

Se știe că ([3], I, pag. 198) tensorul de curbura al unui spațiu cu conexiune afină Γ_{jk}^i este:

$$(4) \quad \Gamma_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{sk}^i \Gamma_{ji}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s.$$

Pentru spațiul A_2 cu conexiune (3), componentele tensorului de curbura sînt ($x^1 = x$, $x^2 = y$; $i, j, k, l, s = 1, 2$)

$$(5) \quad \begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= 3xy^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial g}{\partial y} + 6\rho xy + fg - \rho^2 x^3 y^3, \\ \Gamma_{212}^2 &= -3x^2 y \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - 6\rho xy - fg + \rho^2 x^3 y^3, \\ \Gamma_{112}^2 &= y^3 \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} + 3\rho y^2 - 3\rho g xy^2 - g^2 - 3\rho^2 x^2 y^4 - \rho y^3 f, \\ \Gamma_{221}^1 &= x^3 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3\rho x^2 - 3\rho^2 x^4 y^2 - f^2 - \rho g x^3 - 3\rho f x^2 y. \end{aligned}$$

Fiind dat un spațiu A_2 cu conexiune afină Γ_{jk}^i , acest spațiu este local euclidian dacă tensorii de torsione și de curbura sînt nuli ([3], II, p. 384).

Tensorul de torsione al spațiului A_2 cu conexiunea (3) este nul; ținînd seama de (5), condiția ca tensorul de curbura să fie nul conduce la sistemul:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial g}{\partial y} + 3xy^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + 6\rho xy - \rho^2 x^3 y^3 + fg &= 0, \\ -2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - 3x^2 y \frac{\partial \rho}{\partial x} - 6\rho xy + \rho^2 x^3 y^3 - fg &= 0 \\ -\frac{\partial g}{\partial x} + y^3 \frac{\partial \rho}{\partial y} + 3\rho y^2 - 3\rho g xy^2 - 3\rho^2 x^2 y^4 - \rho y^3 f - g^2 &= 0, \\ x^3 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3\rho x^2 + 3\rho^2 x^4 y^2 - 3\rho f x^2 y - \rho g x^3 - f^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Obținem deci un sistem de patru ecuații liniare cu derivate parțiale în 3 necunoscute.

Așadar:

Condiția necesară și suficientă ca un spațiu A_2 cu conexiune (3) să fie local euclidian este ca funcțiile ρ, f, g să satisfacă sistemul (6).

*

Observăm că ecuația (1) a curbelor caracteristice se conservă printr-o transformare proiectivă de conexiune ([3], II, p. 383)

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \psi_k + \delta_k^i \psi_j.$$

Astfel, luînd:

$$\psi_1 = -g, \quad \psi_2 = -f,$$

avem (suprimînd supralinierea)

$$(7) \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0$$

În condițiile (7), se spune [5] că rețeaua de curbe coordonate formează o rețea Cebîșev.

În aceste condiții, conexiunea (3) devine:

$$(8) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 3\rho xy^2, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 &= \rho x^3, \\ \Gamma_{11}^2 &= \rho y^3, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 &= 3\rho x^2 y. \end{aligned}$$

Observăm că aceste spații depind de o funcție arbitrară ρ .

Un spațiu A_2 cu conexiune (8) este locul euclidian dacă funcția ρ satisface sistemul:

$$(9) \quad \begin{cases} x \frac{\partial \rho}{\partial x} - y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \\ 3y \frac{\partial \rho}{\partial y} + 6\rho - \rho^2 x^2 y^2 = 0, \\ y \frac{\partial \rho}{\partial y} + 3\rho - 3\rho^2 x^2 y^2 = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuație, deducem

$$\rho = \Phi(x, y)$$

Înlocuind în celelalte, obținem:

$$\begin{cases} 3xy\Phi' + 6\Phi - x^2 y^2 \Phi^2 = 0, \\ xy\Phi' + 3\Phi - 3x^2 y^2 \Phi^2 = 0, \end{cases}$$

care nu admite soluție.

Așadar avem următorul rezultat:

Spațiile local euclidiene A_2 de speța a treia admițînd caracteristice drepte care fac parte dintr-un fascicol nu pot fi raportate la o rețea Cebîșev.

Altfel spus: Nu există spații A_2 local euclidiene, de speța a treia, admițînd caracteristice drepte care fac parte dintr-un fascicol, spațiile fiind raportate la o rețea Cebîșev.

Însă, există spații local euclidiene A_2 de speța a treia raportate la o rețea Cebîșev, dreptele caracteristice fiind paralele (v. [1], [2]).

Dacă raportăm spațiul A_2 cu conexiune (3) la o rețea semi-Cebîșev, de exemplu

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \neq 0,$$

obținem conexiunea:

$$(10) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 3\rho xy^2 + 2\rho, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 &= \rho; \\ \Gamma_{11}^2 &= \rho y^3, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = g, & \Gamma_{22}^2 &= 3\rho x^2 y. \end{aligned}$$

Observăm că aceste spații depind, în general, de două funcții arbitrare ρ și g .

Un spațiu A_2 cu conexiune (10) este local euclidian dacă funcțiile ρ și g satisfac sistemul:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial g}{\partial y} + 3xy^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + 6\rho xy - \rho^2 x^3 y^3 = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} - 3x^2 y \frac{\partial \rho}{\partial x} - 6\rho xy + \rho^2 x^3 y^3 = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} + y^3 \frac{\partial \rho}{\partial y} + 3\rho y^2 - 3\rho g xy^2 - 3\rho^2 x^2 y^4 - g^2 = 0, \\ x^3 \frac{\partial \rho}{\partial x} + 3\rho x^2 - 3\rho^2 x^4 y^2 - \rho g x^3 = 0. \end{array} \right.$$

Sistemul (11) neavînd soluții, avem următorul rezultat:

Spațiile local euclidiene A_2 de speța a treia admițînd caracteristice drepte care fac parte dintr-un fascicol nu pot fi raportate la o rețea semi-Cebîșev Așadar, nu există spații A_2 , local euclidiene de speța a treia admițînd caracteristice drepte care fac parte dintr-un fascicol, raportate la o rețea semi-Cebîșev.

Însă există spații A_2 local euclidiene de speța a treia, raportate la o rețea semi-Cebîșev, admițînd caracteristice drepte paralele (v. [1], [2]).

* * *

Vom studia spațiile (3) în cazul general (cînd nu sînt raportate la o rețea Cebîșev sau semi-Cebîșev), în condițiile în care conexiunea contractată

$$\Gamma_i = \Gamma_{r,i}$$

este nulă

În acest caz, componentele conexiunii sînt:

$$(12) \quad \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \rho xy^2, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\rho x^2 y, \quad \Gamma_{22}^1 = \rho x^3, \\ \Gamma_{11}^2 = \rho y^3, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\rho xy^2, \quad \Gamma_{22}^2 = \rho x^2 y. \end{array}$$

Observăm că aceste spații depind de o funcție arbitrară. Spațiile cu conexiune (12) sînt local euclidiene dacă ρ satisface ecuația cu derivate parțiale:

$$(13) \quad x \frac{\partial \rho}{\partial x} + y \frac{\partial \rho}{\partial y} + 4\rho = 0.$$

Sistemul caracteristic al ecuației (13) este:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{d\rho}{4\rho},$$

avînd integrale prime

$$y = C_1 x, \quad \rho = \frac{C_2}{x^4}.$$

Integrala generală fiind de forma $C_2 = \varphi(C_1)$, rezultă

$$(14) \quad \rho = \frac{1}{x^4} \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Așadar avem următorul rezultat:

Fie un spațiu local euclidian A_2 de speța a treia cu caracteristice drepte ce ac parte dintr-un fascicol. Dacă conexiunea contractată Γ_i este nulă, conexiunea unui astfel de spațiu poate fi adusă la forma (12), unde ρ este dat de relația (14).

Prin transformarea proiectivă de coordonate:

$$(15) \quad \begin{cases} x' = \frac{x}{y}, \\ y' = \frac{1}{y}, \end{cases}$$

conexiunea spațiului devine (*) (suprimînd accentel):

$$(16) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{y}, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= ya(x), & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{2}{y}, \end{aligned}$$

unde s-a notat

$$a(x) = -\frac{1}{x^4} \varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Această formă canonică a fost pusă în evidență în [2] (v. și [I]). În acest caz, dreptele caracteristice sînt paralele cu axa y .

Spațiul A_2 cu conexiune (4) nu este echivalent în mare cu spațiul afin E_2 (v. [2]).

BIBLIOGRAFIE

1. G. G. Vrănceanu, *Determinarea spațiilor cu conexiune afină local euclidiană A_2 de speță trei*. Anal.Univ. București, seria St. nat., nr. 15, 1957, p. 43—49.
2. Ion D. Teodorescu și Nicolae I. Nediță. *Spații A_2 de speța trei cu caracteristice drepte*. Anal. Univ. București, seria St. nat., nr. 2, 1967, p. 91—100.
3. G. Vrănceanu *Leçons de Géométrie différentielle*, Vol. I—II, Ed de l'Acad. de la R.P. Roumaine 1957; Vol. III, Ed. de l'Acad. de la R.S.R., București, et Gauthier — Villars, Paris, 1964.

*) Printr-o transformare de coordonate $x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, conexiunea Γ_{jk}^i a unui spațiu cu conexiunea afină $A_n(x^1, x^2, \dots, x^n)$ se transformă după legea ([3], I, pag. 143)

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma_{rs}^i \frac{\partial x^r}{\partial x^j} \frac{\partial x^s}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^r \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}$$

4. Ion D. Teodorescu *Asupra spațiilor A_2 cu conexiune afină*, Studii și cercetări matematice, București, t. 20, nr. 5, 1968, p. 751—761.
5. A. Haimovici. *Asupra conexiunii spațiilor lui Cartan*. St. cerc. știin. — Matematică, Acad. R.S.R. — filiala Iași, an. XII, fasc. 1, 1962, p. 129—149.

Primită la redacție la 10 XI 1969

Institutul pedagogic, București

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПРЯМЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Краткое содержание

В заметке изучается пространство A_2 с прямыми характеристиками, прямые образуют пучок.

Доказывается, что если пространство A_2 относится к решетке Чебышева или к получебышевской решетке, то A_2 не может быть евклидовым. Рассматривается общий случай, при условиях, что контрактуемая связность является нулевой ($\Gamma_k = \Gamma_{ik}^i = 0$).

Если пространство A_2 локально евклидово, то результаты сводятся к тем, которые были даны Г. Г. Врэнчану и Ион Д. Теодореску. Изучается эквивалентность этих пространств локально евклидовых $A_2(x, y)$, и аффинных пространств $E_2(x, y)$.

SUR CERTAINS ESPACES À CARACTÉRISTIQUES DROITES

Résumé

Dans cette note on étudie les espaces A_2 d'espèce trois à caractéristiques droites, les droites faisant partie d'un fascicule.

On démontre que si l'espace A_2 est rapporté à un réseau de Tchebycheff, ou à un réseau demi-Tshebycheffien, l'espace A_2 ne peut pas être localement euclidien. On étudie le cas général, dans les conditions où la connexion contractée est nulle ($\Gamma_k = \Gamma_{ik}^i = 0$).

Si l'espace A_2 est localement euclidien, on retrouve les résultats donnés par G. G. Vranceanu et Ion D. Teodorescu. On étudie l'équivalence en grand de ces espaces localement euclidiens $A_2(x, y)$ avec l'espace affine $E_2(u, v)$.

UN SPAȚIU AL PUNCTELOR CU FAMILII DE COORDONATE

TRAIAN NOAGHI

1. MULȚIMEA VECTORILOR GLISANȚI

Deoarece vectorii glisanți au o mare aplicabilitate în mecanica corpului rigid, studiul lor prezintă mare importanță și în [3] se încearcă o reprezentare analitică a acestora.

Spre deosebire de vectorii liberi care sînt caracterizați de mărime (modul) direcție și sens, vectorii glisanți au și o a patra caracteristică și anume dreapta suport.

Se știe [2] că din punct de vedere analitic un vector liber este determinat cunoscîndu-se componentele scalare. Pentru determinarea din punct de vedere analitic a unui vector glisant este necesar, ca pe lângă aceste componente scalare să se dea și alte elemente cu ajutorul cărora să poată fi determinată și o parte caracteristică — dreapta suport. Pentru că direcția acestuia este determinată prin cunoașterea componentelor scalare, pentru determinarea precisă a dreptei suport este suficientă cunoașterea unui punct prin care aceasta trece.

Una dintre operațiile importante cu acești vectori este operația de compunere. Spre deosebire de cazul vectorilor liberi, această operație în mulțimea vectorilor glisanți poate fi efectuată numai în cazul cînd cei doi vectori care se compun au suporturile coplanare, motiv pentru care ne vom ocupa numai de cazul vectorilor glisanți situați în planul XOY , situație la care se poate ajunge prin alegerea convergenabilă a sistemului de referință și anume fiind dați doi vectori $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ cu suporturile concurente, aceștia vor putea fi compuși și în urma acestei operații se obține vectorul rezultat $\vec{R}$. Dacă vectorul $\vec{F}_3$ are suportul concurent cu a lui $\vec{R}$ aceștia determină un plan în care se alege un alt sistem de referință față de care se determină componentele lor și pot fi apoi compuși. În mod asemănător se poate proceda și atunci cînd suporturile lor sînt paralele.

Deci studiul vectorilor glisanți situați numai în planul XOY este justificat.

Fie vectorul glisant $\vec{F}$ din planul XOY avînd componentele scalare p și q și dreapta suport D . Dum am arătat mai sus, pentru precizarea elementelor care caracterizează acest vector, pe lîngă cunoașterea componentelor scalare p, q mai este necesară precizarea unui punct A al dreptei suport D . În [3] se alege ca punct al dreptei suport punctul în care aceasta intersec-tează una din axe, pentru fixarea ideilor axa OX . La prima vedere această alegere a punctului A prezintă avantajul că pentru determinarea acestui punct este necesară o singură coordonată. Dar are dezavantajul că nu poate fi caracterizată o mulțime importantă de vectori și anume aceia care are direcțiile paralele cu axa OX .

Pentru evitarea acestui neajuns vom face o alegere arbitrară a punctului A .

Cu aceste precizări un vector glisant din planul XOY poate fi asemuit cu un punct din spațiul cu patru dimensiuni $M_{(p, q; x, y)}$ unde primele două componente reprezintă componentele scalare ale vectorului $\vec{F}$ considerat ca vector liber, iar x, y coordonatele punctului cu ajutorul căruia se determină dreapta suport.

Deoarece alegerea punctului $A(x, y)$ a fost făcută în mod arbitrar, acest punct poate fi înlocuit cu un alt punct $B(X, Y)$ care să aparțină dreptei suport, condiție care din punct de vedere analitic se exprimă prin relația

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q}$$

sau sub altă formă

$$p(Y - y) = q(X - x)$$

Făcînd această schimbare cele patru caracteristici ale vectorului glisant nu se schimbă. Indiferent însă ce schimbare vom face asupra coordonatelor p, q ale punctului M aceasta determină o schimbare cel puțin a uneia din cele patru caracteristici, deci o schimbare a vectorului.

Din aceste motive în cele ce urmează vom folosi denumirile de „coordo-nate principale” pentru primele două coordonate p și q și „coordo-nate secundare” pentru ultimele două x și y .

Fiînd date două puncte $M_1(p_1, q_1; x_1, y_1)$ și $M_2(p_2, q_2; x_2, y_2)$, ale căror coordonate satisfac relațiile:

$$p_1 = p_2 = p \quad (1.1.a)$$

$$q_1 = q_2 = q \quad (1.1.b)$$

$$p(y_2 - y_1) = q(x_2 - x_1) \quad (1.1.c)$$

vom spune că aceste două puncte sînt echivalente și vom nota acestea cu $M_1 \sim M_2$. Această denumire este justificată deoarece relația mai sus introdusă între punctele spațiului cu patru dimensiuni satisface axiomele relației de echivalență și anume:

a) reflexivitatea : $M \sim M$

Primele două relații: (1.1.a) și (1.1.b) sînt evident satisfăcute, iar (1.1.c) de asemenea este satisfăcută, deoarece în acest caz cele două paranteze sînt simultan nule.

b) simetria : $M_1 \sim M_2$ implică $M_2 \sim M_1$

Relațiile (1.1.a) și (1.1.b) sînt evident îndeplinite în acest caz, iar a treia (1.1.c) este satisfăcută deoarece această relație pentru echivalența $M_2 \sim M_1$ se obține din relația respectivă pentru echivalența $M_1 \sim M_2$, pentru care este îndeplinită prin ipoteze, prin înmulțirea cu -1 .

c) tranzitivitatea $M_1 \sim M_2$ și $M_2 \sim M_3$ implică $M_1 \sim M_3$ Primele două relații (1.1.a) și (1.1.b) sînt îndeplinite în baza egalității numerelor, reale, care este o relație de echivalență. Cît privește relația (1.1.c) din cele două echivalente date prin ipoteză avem:

$$p(y_2 - y_1) = q(x_2 - x_1)$$

$$p(y_3 - y_2) = q(x_3 - x_2)$$

din care prin adunarea membru cu membru se obține

$$p(y_3 - y_1) = q(x_3 - x_1)$$

care nu este altceva decît relația (1.1.c) pentru echivalența $M_1 \sim M_3$.

2. DEFINIȚIA SPAȚIULUI T

Considerînd mulțimea punctelor M ale spațiului cu patru dimensiuni în care avem definită relația de echivalență mai sus introdusă prin relațiile (1.1.a), (1.1.b), (1.1.c) cu ajutorul acesteia această mulțime poate fi împărțită în clase de echivalență. Dacă M este un punct din spațiul cu patru dimensiuni, vom nota cu $P(p, q; x, y)$ casa tuturor punctelor echivalente cu punctul M față de relația de echivalență introdusă.

Definiție: Numim spațiu T mulțimea claselor de echivalență $P(p, q; x, y)$ formate din punctele M ale spațiului R^4 echivalente față de relația de echivalență definită de (1.1.a) (1.1.b) (1.1.c).

Obs. În baza acestei definiții putem spune că unui vector glisant din planul XOY îi corespunde un punct din spațiul T .

3. OPERAȚII ÎN SPAȚIUL T

1. Operația de adunare (compunere)

Pornind de la observația făcută în [2] relativ la legătura între vectorii glisanți și punctele spațiului T vom defini operația de adunare în T , pornind de la legea de compunere a vectorilor glisanți.

Să considerăm pentru început doi vectori glisanți $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ neparaleli, adică pentru care este îndeplinită condiția:

$$\frac{p_1}{p_2} \neq \frac{q_1}{q_2} \quad (3.1)$$

Fie $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$ două puncte care determină cele două suporturi D_1 și D_2 ale vectorilor considerați $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$.

După cum se știe [3] vectorul rezultat $\vec{F}$ va fi determinat cu ajutorul regulii paralelogramului. În baza acestei reguli vectorul $\vec{F}$ va fi diagonala paralelogramului format cu vectorii $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ și va avea drept suport dreapta D dirijată după diagonala mai sus amintită și va trece prin punctul A_0 , punctul de intersecție a dreptelor D_1 și D_2 . Deoarece cunoașterea vectorului diagonal și a punctului A_0 sînt suficiente pentru precizarea celor patru caracteristici ale unui vector glisant, putem spune că vectorul glisant sumă este perfect determinat.

În cele ce urmează vom determina pe cale analitică aceste elemente necesare caracterizării vectorului glisant $\vec{R}$.

Dacă avem $\vec{F}_1(p_1, q_1)$ $\vec{F}_2(p_2, q_2)$ din cele cunoscute din algebra vectorilor liberi avem că

$$p = p_1 + p_2$$

$$q = q_1 + q_2$$

Pentru că am presupus că vectorii $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ satisfac relația (3.1) înseamnă că suporturile lor vor fi concurente, deci punctul $A_0(x_0, y_0)$ există.

Pornind de la ecuațiile celor două suporturi D_1 și D_2 ale vectorilor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$

$$D_1: \begin{cases} x = x_1 + p_1 u \\ y = y_1 + q_1 u \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} x = x_2 + p_2 v \\ y = y_2 + q_2 v \end{cases}$$

a căror intersecție conduce la sistemul

$$p_1 u - p_2 v = x_2 - x_1$$

$$q_1 u - q_2 v = y_2 - y_1$$

care va fi în baza relației (3.1) un sistem compatibil unic determinat, din a cărui rezolvare obținem pentru punctul A_0 coordonatele:

$$x_0 = \frac{p_1 \Delta_2 - p_2 \Delta_1}{\Delta_{12}}$$

$$y_0 = \frac{q_1 \Delta_2 - q_2 \Delta_1}{\Delta_{12}}$$

unde:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

În baza acestor rezultate vom da următoarea:

Definiție: Fiind date punctele $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ și $P_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ din spațiul T vom numi sumă a acestor puncte, punctul $P(p, q, x, y)$ din T și vom nota

$$P = P_1 + P_2$$

ale cărui coordonate sînt date de relațiile:

$$p = p_1 + p_2 \quad (3.2.a)$$

$$q = q_1 + q_2 \quad (3.2.b)$$

$$x = \frac{p_1 \Delta_2 - p_2 \Delta_1}{\Delta_{12}} \quad (3.2.c)$$

$$y = \frac{q_1 \Delta_2 - q_2 \Delta_1}{\Delta_{12}} \quad (3.2.c)$$

atunci cînd $\Delta_{12} \neq 0$ unde:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

2. Operația de înmulțire cu un scalar

Pentru definirea acestei operații în spațiul T vom porni ca mai sus de la mulțimea vectorilor glisanți. Dacă $\vec{F}$ este un vector glisant în urma acestei operațiuni vom găsi un alt vector $\vec{F}_1$ care are acelaș suport, aceeaș direcție, modulul este egal cu produsul între scalarul α și modulul lui $\vec{F}$ iar sensul este acelaș sau contrar cu a lui $\vec{F}$ după cum scalarul α este pozitiv sau negativ.

Acum dacă $\vec{F}$ are componentele scalare p și q și punctul care determină suportul este $A(x_0, y_0)$ și α este un scalar pentru a obține componentele scalare p_1 și q_1 ale lui $\vec{F}_1$ care să satisfacă condițiile de mai sus acestea trebuiesc calculate după următoarele legi:

$$p_1 = \alpha p$$

$$q_1 = \alpha q$$

Astfel vom da următoarea:

Definiție: Produsul unui punct $P(p, q, x_0, y_0)$ din T prin scalarul α va fi punctul $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ și vom folosi notația:

$$P_1 = \alpha P$$

ale cărui coordonate se calculează după următoarele reguli:

$$p_1 = \alpha p \quad (3.4.a)$$

$$q_1 = \alpha q \quad (3.4.b)$$

$$x_1 = x_0 \quad (3.4.c)$$

$$y_1 = y_0 \quad (3.4.d)$$

Cele două operații mai sus introduse, își găsesc justificarea modului cum au fost definite prin următoarele teoreme:

Teorema 3.1. Dacă $M_1 \in P_1$, $M'_1 \in P_1$, $M_2 \in P_2$, $M'_2 \in P_2$ atunci

$$M_1 + M_2 \sim M'_1 + M'_2$$

Demonstrație

Faptul că M_1 și M_2 precum și M'_1 , M'_2 aparțin aceluiași clase înseamnă că sînt echivalente, adică $M_1 \sim M'_1$ și $M_2 \sim M'_2$.

Pentru a ajunge la concluzia teoremei este suficient să arătăm că are loc

$$M_1 + M_2 \sim M'_1 + M'_2 \quad (3.5)$$

deoarece dacă această relație are loc aplicînd-o de două ori obținem chiar concluzia teoremei.

Pentru demonstrarea relației (3.5) considerăm că $M_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$, $M_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ și $M'_1(p'_1, q'_1, x'_1, y'_1)$, $M'_2(p'_2, q'_2, x'_2, y'_2)$

Deoarece $M_2 \sim M'_2$ înseamnă că avem:

$$p_2 = p'_2 \quad (3.6.a)$$

$$q_2 = q'_2 \quad (3.6.b)$$

$$p_2(y'_2 - y_2) = q_2(x'_2 - x_2) \quad (3.6.c)$$

Dacă notăm cu:

$$M_0 = M_1 + M_2 \text{ și } M'_0 = M'_1 + M'_2 \quad (3.7)$$

relația (3.5) devine:

$$M_0 \sim M'_0 \quad (3.5')$$

și dacă considerăm că $M_0(p_0, q_0, x_0, y_0)$, $M'_0(p'_0, q'_0, x'_0, y'_0)$, relația (3.5') conduce la relațiile:

$$p_0 = p'_0 \quad (3.8.a)$$

$$q_0 = q'_0 \quad (3.8.b)$$

$$p_0(y'_0 - y_0) = q_0(x'_0 - x_0) \quad (3.8.c)$$

Pentru că pentru determinarea coordonatelor lui M_0 și M'_0 avem nevoie de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_{12}, \Delta'_1, \Delta'_{12}$ vom da mai jos expresiile lor

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ p'_1 & q'_1 \end{vmatrix} \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ p'_2 & q'_2 \end{vmatrix} \quad \Delta'_{12} = \begin{vmatrix} p'_1 & q'_1 \\ p'_2 & q'_2 \end{vmatrix}$$

Din expresiile lor se observă că $\Delta_1 = \Delta'_1$. De asemenea în baza relațiilor (3.6.a) și (3.6.b) obținem că $\Delta_{12} = \Delta'_{12}$.

Cu acestea putem trece la demonstrarea relațiilor (3.8.a) (3.8.b), (3.8.c). Deoarece în baza definiției operației de adunare avem:

$$p_0 = p_1 + p_2 \quad p'_0 = p_1 + p'_2$$

$$q_0 = q_1 + q_2 \quad q'_0 = q_1 + q'_2$$

în baza relațiilor (3.6.a) și (3.6.b) obținem că:

$$p_0 = p'_0$$

$$q_0 = q'_0$$

care sînt tocmai relațiile (3.8.a) și (3.8.b).

Conform relațiilor (3.2.c) și (3.2.d) avem:

$$x_0 = \frac{p_1 \Delta_2 - p_2 \Delta_1}{\Delta'_{12}} \quad x'_0 = \frac{p_1 \Delta'_2 - p'_2 \Delta'_1}{\Delta'_{12}}$$

$$y_0 = \frac{q_1 \Delta_2 - q_2 \Delta_1}{\Delta_{12}} \quad y'_0 = \frac{q_1 \Delta'_2 - q_2 \Delta'_1}{\Delta'_{12}}$$

și ținînd cont de observația făcută că $\Delta_1 = \Delta'_1$ și $\Delta_{12} = \Delta'_{12}$ relația (3.8.c) devine:

$$(p_1 + p_2) (y'_0 - y_0) - (q_1 + q_2) (x'_0 - x_0) = 0$$

care în urma unui calcul elementar poate fi pusă sub forma:

$$(\Delta_2 - \Delta'_2) [p(q_1 + q_2) + q(p_1 + p_2)] = 0$$

Dar în baza relației (3.6.c) se obține că:

$$\Delta_2 = \Delta'_2$$

Deci relația (3.8.c) este satisfăcută, care împreună cu (3.8.a), (3.8.b) studiate mai sus arată că are loc echivalența:

$$M_0 \sim M'_0$$

sau

$$M_1 + M_2 \sim M_1 + M'_2$$

și cu aceasta teorema este în întregime demonstrată.

Teorema 3.2. Dacă $M_1 \sim M_2$ atunci $\alpha M_1 \sim \alpha M_2$.

Pentru demonstrarea acestei teoreme trebuie să arătăm că dacă pentru $M_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$, $M_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ avem îndeplinite relațiile:

$$p_1 = p_2 = p \quad (3.9)$$

$$q_1 = q_2 = q$$

$$p(y_2 - y_1) = q(x_2 - x_1)$$

atunci au loc relațiile:

$$p'_1 = p'_2 = p'$$

$$q'_1 = q'_2 = q' \quad (3.10)$$

$$p'_1(y'_2 - y'_1) = q'(x'_2 - x'_1)$$

unde p'_1, q'_1, x'_1, y'_1 sînt coordonatele lui $M'_1 = \alpha M_1$ și p'_2, q'_2, x'_2, y'_2 sînt coordonatele lui $M'_2 = \alpha M_2$.

Dar în baza relațiilor (3.4.a), (3.4.b), (3.4.c), (3.4.d) care intervin în definirea operației de înmulțire cu un scalar în T relațiile (3.10) se obțin din (3.9) printr-o simplă înmulțire cu scalarul α , deci acestea sînt îndeplinite și cu aceasta teorema este demonstrată.

Observație. În baza definițiilor celor două operații definite în spațiul T și a celor două teoreme putem afirma că orice punct P a spațiului T ca o clasă de echivalență poate și reprezentată printr-un element oarecare al ei M cea punct al lui R^4 .

Odată definită operația de adunare a două puncte vom putea defini elementul neutru față de operația de adunare pe care îl vom nota cu θ și care va fi clasa elementelor echivalente cu punctul $M_0(0, 0, 0, 0)$. Se vede imediat că aceste clase conține elementele de forma $M(0, 0, x, y)$ unde x, y pot lua orice valoare reală deoarece cele trei condiții ale relației de echivalență introduse mai sus pentru puncte de această formă devin identități de forma $0 = 0$.

Pentru a arăta că punctul $\theta \in T$ este elementul neutru față de operația de adunare trebuie arătat că are loc relația:

$$P + 0 = P \quad (3.11)$$

Fie $M(p, q, x, y) \in P$ și $M_1(0, 0, x, y) \in \theta$
atunci punctul $M_2 = M + M_1$ va fi de forma $M_2(p, q, x_0, y_0)$:

Dar pentru acest caz nu putem aplica legile (3.2.c) și (3.2.d) de calcul a coordonatelor secundare ale sumei deoarece avem că $\Delta_{12} = 0$.

Pentru determinarea acestor coordonate vom folosi observația că în aceste condiții nu numai numitorul celor două relații este nul ci și cei doi numărători sînt nuli, adică avem de a face cu o nedeterminare.

În vederea ridicării vom face următoarea observație: în baza definiției lui Δ_1 și Δ_2 expresia primei coordonate secundare a sumei a două puncte

în condițiile cerute de definiția sumei, este de forma:

$$x_0 = \frac{p_1(xq_2 - yp_2) - p_2(xq_1 - yp_1)}{p_1q_2 - p_2q_1}$$

considerînd $p_1 = p$, $q_1 = q$, x și y niște constante, iar p_2 și q_2 variabile vom defini coordonata secundară a acestei sume ca fiind:

$$L_1 = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{p_1(xq_2 - yp_2) - p_2(xq_1 - yp_1)}{p_1q_2 - p_2q_1}$$

Calculul acestei limite ne conduce la rezultatul că $L_1 = x$.

Printr-un raționament analog vom defini a doua coordonată secundară a sumei ca fiind:

$$L_2 = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{q_1(xq_2 - yp_2) - p_2(xq_1 - yp_1)}{p_1q_2 - p_2q_1}$$

a căror calcul va conduce de asemenea la rezultatul $L_2 = y$.

Deci vom obține $M_2(p, q, x, y)$ și deoarece M_2 au coordonatele identice cu ale lui M înseamnă că sînt echivalente adică avem că $M_2 \sim M$ ceea ce arată că

$$P + \theta = P$$

ceea ce dovedește că θ este elementul neutru față de adunare.

O altă proprietate a operației de adunare este aceea că este comutativă adică:

$$P_1 + P_2 = P_2 + P_1 \quad (3.12)$$

Dacă $M_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$, $M_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ sînt doi reprezentanți ai claselor P_1 respectiv P_2 înseamnă că pentru ca (3.12) să aibă loc trebuie ca să avem:

$$M_1 + M_2 \sim M_2 + M_1 \quad (3.13)$$

dacă notăm cu:

$$M_0 = M_1 + M_2 \text{ și } M'_0 = M_2 + M_1$$

și $M_0(p_0, q_0, x_0, y_0)$ $M'_0(p'_0, q'_0, x'_0, y'_0)$ atunci avem că:

$$\begin{aligned} p_0 &= p_1 + p_2 & \text{și} & & p'_0 &= p_2 + p_1 \\ q_0 &= q_1 + q_2 & & & q'_0 &= q_2 + q_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Din aceste expresii avem că $p_0 = p'_0$ și $q_0 = q'_0$ egalități ce rezultă din comutativitatea operației de adunare cu numere reale.

Pentru a dovedi echivalența (3.13) mai trebuie arătat că are loc relația

$$p_0(y'_0 - y_0) = q_0(x'_0 - x_0) \quad (3.15)$$

Ținând cont de expresiile coordonatelor secundare:

$$x_0 = \frac{p_1 \Delta_1 - p_2 \Delta_1}{\Delta_{12}} \quad x'_0 = \frac{p_2 \Delta'_2 - p_1 \Delta'_1}{\Delta'_{21}}$$

$$y_0 = \frac{q_1 \Delta_2 - q_2 \Delta_1}{\Delta_{12}} \quad \text{și} \quad y'_0 = \frac{q_2 \Delta'_2 - q_1 \Delta'_1}{\Delta_{12}}$$

și că din expresiile determinațiilor Δ_1 , Δ_2 , Δ_{12} , Δ'_1 , Δ'_2 , Δ_{21} ajungem la egalitățile:

$$\Delta_1 = \Delta'_2 \quad \Delta_2 = \Delta'_1 \quad \Delta_{12} = -\Delta_{21}$$

avem că $x_0 = x'_0$ și $y_0 = y'_0$ ceea ce arată că cele două paranteze care intervin în cei doi membri ai egalității (3.15) se anulează și deci (3.15) devine o identitate de forma $0 = 0$.

Deci echivalența (3.13) este dovedită și deci relația (3.13) are loc.

Atunci cînd a fost definită operația de adunare în spațiul T ea a fost definită numai pentru perechile de puncte pentru care $\Delta_{12} \neq 0$. Dar din această categorie nu fac parte o clasă importantă de puncte și anume perechile de puncte de forma $P(\lambda p, \lambda q, x, y)$ și $P_1(p, q, x, y)$ unde este un parametru real. Înainte de a vedea dacă aceste perechi de puncte pot fi adunate după legile (3.2) vom face observația că dacă $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ și $P_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ sînt două puncte astfel ca $\Delta_{12} \neq 0$ atunci coordonatele secundare ale sumei în baza relațiilor (3.2.c) și (3.2.d) sînt de asemenea x_1 și y_1 . De asemenea trebuie observat că încercînd să aplicăm pentru calculul coordonatelor sumei punctelor mai sus considerați P și P_1 relațiile (3.2.c) și (3.2.d) acestea vor conduce la nedeterminări.

Printr-un raționament analog celui făcut la studiul elementului neutru față de adunare o vom considera drept coordonate secundare ale sumei $P_1 + P_1$ numerele L_1 și L_2 date de relațiile:

$$L_1 = \lim_{q_2 \rightarrow q_1} \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{p_1(xq_2 - y p_2) - p_2(xq_1 - y p_1)}{p_1 q_2 - p_1 q_2}$$

$$L_2 = \lim_{p_1 \rightarrow p_1} \lim_{q_2 \rightarrow q_1} \frac{q_1(xq_2 - y p_2) - q_2(xq_1 - y p_1)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}$$

Considerînd că niciunul din punctele P și P_1 nu sînt 0 (caz care a fost studiat anterior) calculul celor două limite ne arată că avem:

$$L_1 = x, \quad L_2 = y$$

Deci iată că relațiile (3.2) pot fi extinse și la această clasă de puncte din T mulțime ce corespunde vectorilor glisanți coliniari.

O altă mulțime de puncte din T care nu a fost cuprinsă în definiția operației de adunare, este aceea a punctelor lui T care corespunde vectorilor glisanți cu suporturile paralele, adică puncte de forma $P_1(q_1, p_1, x_1, y_1)$ și $P_2(\lambda p_1, \lambda q_1, x_2, y_2)$ unde λ este un număr real.

Înainte de a trece la studiul posibilităților de adunare a acestor puncte vom stabili un rezultat ajutător prin următoarea:

Lemă. Fiind date punctele $P_1(p, q, x_1, y_1)$ și $P_2(\lambda p, \lambda q, x_2, y_2)$ unde p și q nu sînt simultan nuli, atunci există un punct $P_3(p_3, q_3, x_3, y_3)$ astfel ca $P_3 \sim P_2$ în sensul egalității lui T și astfel ca să aibă loc relația:

$$p(x_3 - x_1) = q(y_3 - y_1) \quad (3.16)$$

Pentru demonstrarea lemei vom construi un punct $P_3 \in T$ care să satisfacă concluzia lemei.

Fie $M(\lambda p, \lambda q, x_2, y_2)$ un reprezentant al clasei P_2 dacă $M_3(p_3, q_3, x_3, y_3)$ este reprezentantul clasei P_3 atunci pentru a avea egalitatea $P_3 = P_2$ trebuie să fie îndeplinite condițiile:

$$p_3 = \lambda p \quad (3.17.a)$$

$$q_3 = \lambda q \quad (3.17.b)$$

Dacă luăm drept coordonate secundare ale lui M_3 numerele:

$$x_3 = \frac{q^2 x_2 + p^2 x_1 + pq(y_1 - y_2)}{p^2 + q^2} \quad (3.18.a)$$

$$y_3 = \frac{p^2 y_2 + q^2 y_1 + pq(x_1 - x_2)}{p^2 + q^2} \quad (3.18.b)$$

atunci în urma unui calcul foarte simplu se poate arăta că este îndeplinită și condiția:

$$p(y_3 - y_2) = q(x_3 - x_2)$$

care împreună cu relațiile (3.17.a) și (3.17.b) arată echivalența $M_3 \sim M_2$ sau altfel spus dovedește egalitatea $P_3 = P_2$ în sensul egalității lui T .

Cît privește relația (3.16), înlocuind x_3 și y_3 cu expresiile lor (3.18) și efectuînd calculele acestea devine o identitate.

Deci punctul P_3 care să satisfacă condițiile lemei este punctul ale cărui coordonate sînt date de grupele de relații (3.17) și (3.18).

Pornind de la rezultatele stabilite anterior putem trece la analiza posibilităților de adunare a punctelor de forma $P_1(p, q, x_1, y_1)$ $P_2(\lambda p, \lambda q, x_2, y_2)$. Fie M_1 și M_2 reprezentanții claselor P_1 respectiv P_2 . Pentru aceste puncte avem $\Delta_{12} = 0$. Spre deosebire de cazurile studiate anterior numărătorii expresiilor (3.2.c) și (3.2.d) sînt nenuli, deci, aceste relații aplicate la punctele considerate P_1 și P_2 ne conduc la numerele improprii $+\infty$ sau $-\infty$ drept coordonate secundare.

Pentru a aduna aceste două puncte ale lui T , vom proceda în felul următor: considerăm că reprezentantul M_2 este astfel ales încît să satisfacă relațiile (3.16) alegere care poate fi făcută în baza lemei anterior demonstrate. De asemenea presupunem că $x_1 \neq x_2$ sau $y_1 \neq y_2$ și $p \neq 0$ sau $q \neq 0$.

Vom nota cu

$$a = x_2 - x_1 \quad (3.19)$$

$$b = y_2 - y_1$$

să considerăm punctele $V_1(a, b, x_1, y_1)$ și $V_2(-a, -b, x_2, y_2)$ și P_1, P_2 date de relațiile:

$$P'_1 = P_1 + V_1, \quad P'_2 = P_2 + V_2 \quad (3.20)$$

Pentru calculul coordonatelor secundare ale lui P'_1 și P'_2 putem folosi relațiile (3.2.b) deoarece pentru aceste sume avem că $\Delta_{11} \neq 0$ și $\Delta_{22} \neq 0$. Pentru a arăta acestea vom folosi metoda reducerii la absurd.

Dezvoltînd determinantul Δ_{11} obținem, în ipoteza că acesta este nul, expresia:

$$pa - qb = 0$$

Din modul cum au fost definite cele două puncte P_1 și V_1 se observă că:

$$pa + qb = 0$$

Înmulțind cu b respectiv cu a cele două expresii și adunîndu-le, apoi înmulțind cu b și respectiv cu $-a$ și adunînd obținem:

$$p(a^2 + b^2) = 0 \quad \text{și} \quad q(a^2 + b^2) = 0$$

Deoarece avem că $a = 0$ sau $b = 0$ din cele două expresii rezultă că $p = q = 0$ ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra punctului P .

Printr-un raționament analog se poate arăta că și Δ_{22} este nenul.

În baza acestor rezultate se pot aplica formulele (3.2) pentru aceste puncte și astfel vom obține coordonatele celor două puncte astfel:

$$P'_1(p + a, q + b, x_1, y_1) \quad P'_2(\lambda p - a, \lambda q - b, x_2, y_2)$$

Avînd expresiile lui P'_1 și P'_2 vom calcula:

$$P = P_1 + P_2$$

Pentru calculul coordonatelor lui P vom putea folosi grupul de relații (3.2) deoarece Δ_{12} are expresia:

$$\Delta_{12} = (1 + \lambda) \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}$$

care este diferită de zero atunci cînd $\lambda \neq -1$. Presupunînd că avem $\lambda \neq -1$, obținem:

$$P = P'_1 + P'_2 = P_1 + v_1 + P_2 + v_2 = P_1 + P_2 + v_1 + v_2$$

Ultima egalitate are loc deoarece operația de adunare am arătat că este comutativă.

Din modul cum au fost definite cele două puncte v_1 și v_2 putem afirma că:

$$v_1 = -v_2$$

deoarece avem în mod evident

$$a = -(-a)$$

$$b = -(-b)$$

iar relația:

$$a(y_1 - y_2) = b(x_1 - x_2)$$

devine o identitate când a și b sînt înlocuiți cu expresiile lor. În baza acestei observații putem scrie că:

$$P = P_1 + P_2$$

Acest rezultat poate fi formulat sub formă de:

Teorema 3.3. Fiind date punctele $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ și $P_2(p_1, q, x_2, y_2)$ (u $\lambda \neq -1$ astfel ca coordonatele lor să satisfacă condiția $(x_2 - x_1)p = cy_1 - y_2) q$, atunci aceste două puncte se pot aduna și vom avea:

$$P_1 + P_2 = P_1 + V_1 + P_2 + V_2$$

unde V_1 și V_2 au expresiile $V_1(x_2, -x_1, x_1, y_1)$ $V_2(x_1, -x_2, x_2, y_2)$.

Observație: din modul cum a fost definită operația de adunare în T la începutul acestui paragraf, din extinderea definiției acestei operații pentru punctele de forma $P(p, q, x, y)$, $P_1(\lambda p, \lambda q, x, y)$ și în baza teoremei 3.3., rezultă că această operație este definită în T cu excepția punctelor de forma $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$, $P_2(-p_1, -q_1, x_2, y_2)$ și astfel ca să fie îndeplinită condiția (3.16).

După cum am văzut în procesul aplicat la vectorii ce satisfac condițiile teoremei 3.3 nu este aplicabil la aceste perechi. Aplicînd definiția dată la începutul paragrafului obținem că coordonatele principale ale sumei sînt nule iar coordonatele secundare iau una din valorile improprii $+\infty$ sau $-\infty$. Adăugînd la aceasta faptul că aceste două puncte corespund la doi vectori ce formează un cuplu și după cum se știe din mecanică rezultanta acestui sistem de doi vectori este de mărime nulă avînd suportul determinat de punctul de la infinit, vom conveni a spune că rezultatul compunerii celor două puncte este punctul impropriu I vom conveni să notăm că dacă $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ $P_2(-p, -q, x_2, y_2)$ astfel ca să fie îndeplinită condiția (3.16) atunci

$$P_1 + P_2 = I$$

Pentru a putea studia proprietățile punctului impropriu în prealabil vom arăta că operația de adunare — în cazul punctelor proprii se bucură de proprietatea de asociativitate. Pentru aceasta considerăm punctele $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ $P_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ $P_3(p_3, q_3, x_3, y_3)$ și dacă notăm

$$P_0 = (P_1 + P_2) + P_3$$

$$P'_0 = P_1 + (P_2 + P_3)$$

cu $P_0(p_0, q_0, x_0, y_0)$ $P'_0(p'_0, q'_0, x'_0, y'_0)$ a avea loc asociativitatea înseamnă că trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$p_0 = p'_0$$

$$q_0 = q'_0$$

$$p_0(y'_0 - y_0) = q_0(x'_0 - x_0)$$

Primele două rezultă din asociativitatea sumei numerelor reale, iar ultima devine

$$\begin{aligned} (\Delta_{12} + \Delta_{13}) (\Delta_{31} + \Delta_{32}) (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) = \\ = (\Delta_{13} + \Delta_{23}) (\Delta_{21} + \Delta_{31}) (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \end{aligned}$$

care devine o identitate dacă ținem cont de egalitățile

$$\Delta_{ij} = -\Delta_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Pe baza acestei proprietăți a adunării putem scrie că

$$I - I = 0$$

pentru că:

$$I = P_1 + P_2$$

$$-I = -P_1 - P_2$$

$$I - I = P_1 - P_1 + P_2 - P_2 = 0 + 0 = 0$$

deoarece P_1 și P_2 sînt puncte proprii.

Ținînd cont de cele spuse mai sus despre operația de adunare și de definiția operației de înmulțire cu un scalar putem enunța

Teorema 3.4. Spațiul T este un spațiu liniar.

4. NORMA ÎN SPAȚIUL T

Considerăm un punct $P(p, q, x_0, y_0)$ care va corespunde unui vector glisant:

Suportul D a acestui vector glisant va fi descris de ecuațiile:

$$x = x_0 + pu \tag{4.1}$$

$$y = y_0 + qu$$

Perpendiculara dusă din origine pe D de ecuații

$$x = -qu \tag{4.2}$$

$$y = pu$$

va intersecta pe D în punctul $A_1(x_1, y_1)$ a căror coordonate vor fi:

$$x_1 = \frac{q\Delta_0}{p^2 + q^2} \quad y_1 = \frac{p\Delta_0}{p^2 + q^2} \quad (4.3)$$

unde:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ p & q \end{vmatrix}$$

Punctul $A_1(x_1, y_1)$ împreună cu originea determină un vector $\vec{OA}_1$ (considerat ca un vector liber). Ducînd vectorul $\vec{F}$ în originea în A_1 vom obține:

$$\vec{OA}_2 = \vec{OA}_1 + \vec{F} \quad (4.4)$$

cu ajutorul lui $\vec{OA}_2$ vom defini o funcțională f definită pe T cu vectori în R în felul următor

$$f(P) = |\vec{OA}_2| \cdot |\vec{F}| \quad (4.5)$$

unde modulele celor doi vectori se consideră ca pentru vectorii liberi.

Înainte de a studia proprietățile funcționalei definită prin relația (4.5) vom da următoarea

Lema 1. Dacă $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ și $P_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ sînt două puncte din T și dacă $P_0(p_0, q_0, x_0, y_0)$ este dat de relația $P_0 = P_1 + P_2$ atunci

$$\Delta_0 = \Delta_1 + \Delta_2$$

Demonstrarea acestei leme este imediată ținînd cont de relațiile (3.2) care dau pe p_0, q_0, x_0, y_0 și de definițiile celor trei determinanți.

Folosind expresiile analitice ale celor doi vectori considerați ca vectori liberi

$$\vec{OA}_2 = \left(p + \frac{q\Delta_0}{p^2 + q^2}\right) \vec{i} + \left(q - \frac{p\Delta_0}{p^2 + q^2}\right) \vec{I}$$

$$\vec{F} = p\vec{i} + q\vec{I}$$

unde $\vec{i}, \vec{I}$ sînt versorii celor două axe; expresia care definește pe $f(P)$ (4.5) devine:

$$f(P) = (p^2 + q^2 + \Delta^2)^{1/2} \quad (4.6)$$

Pornind de la această expresie analitică a lui $f(P)$ putem arăta cîteva proprietăți ale lui $f(P)$ și anume:

a) Dacă $f(P) = 0$ atunci $p = q = 0$. pentru că $|\Delta| < \infty$ înseamnă $P = \theta$.

b) Dacă considerăm $P_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ $P_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ și ținând cont de lema de mai sus avem:

$$f(P_1 + P_2) = ((p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2)^{1/2}$$

Forma membrului doi a egalității de mai sus ne permite să scriem că

$$f(P_1 + P_2) \leq f(P_1) + f(P_2)$$

adică $f(P)$ este subaditivă.

c) Considerînd punctul $P(p, q, x, y)$ atunci, în baza egalității

$$\Delta_1 = \alpha \Delta_0.$$

unde prin $\alpha \Delta_0$ notat determinantul lui P iar prin αP determinatul lui αP avem că

$$f(\alpha P) = \alpha f(P)$$

deci $f(P)$ este omogenă.

Deoarece această funcțională posedă proprietățile a, b, c, ea sste o normă și în continuare vom folosi pentru funcționala 7 notația consacrată și anume

$$f(P) = \|P\|$$

Observație: Comparînd expresia analitică (4.6) a normei punctelor din T cu expresia normei unui vector liber observăm că în prima mai apare termenul Δ^2 și din această cauză în cele ce urmează vom folosi pentru mărimea Δ dimensiunea de „defect de normă“.

Această denumire este justificată de următoarea

Teorema 4.1. Dacă $M_1(p_1, q_1, x_1, y_1)$ și $M_2(p_2, q_2, x_2, y_2)$ sînt două elemente ale aceleiași clase P atunci

$$f(M_1) = f(M_2)$$

Demonstrație. Faptul că $M_1 \sim P$ și $M_2 \sim P$ se transcrie prin relațiile:

$$p_1 = p_2 = p$$

$$q_1 = q_2 = q$$

$$p(y_2 - y_1) = q(x_2 - x_1)$$

Grupînd în mod convenabil expresia a treia obținem: $x_2 q - y_2 p = x_1 q - y_1 p$ care împreună cu primele două egalități conduc chiar la egalitatea din concluzia teoremei:

$$f(M_1) = f(M_2)$$

Convenim ca $\|I\| = \infty$

Odată definită noțiunea de normă, aceasta împreună cu teorema 3.4 ne permite să anunțăm:

Teorema 4.2. Spațiul T este un spațiu liniar normat, cu norma dată de (4.6).

O altă proprietate a spațiului T este dată de:

Teorema 4.3. Între punctele spațiului T se poate defini operația de produs scalar prin expresia:

$$(P_1, P_2) = \left\| \frac{P_1 + P_2}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{P_1 - P_2}{2} \right\|^2 \quad (4.7)$$

Demonstrație

Pentru început calculăm expresia lui (P_1, P_2) în funcție de coordonatele celor două puncte. Ținând cont de regulile de calcul ale coordonatelor principale ale sumei și diferenței de două puncte precum și de lema demonstrată în acest paragraf expresia produsului scalar devine:

$$(P_1, P_2) = p_1 p_2 + q_1 q_2 + \Delta_1 \Delta_2 \quad (4.8)$$

Schimbând locul lui P_1 cu al lui P_2 și ținând cont de (4.8) obținem că:

$$a) \quad (P_1, P_2) = (P_2, P_1)$$

Calculând valoarea lui $(P_1 + P_2, P_3)$ și ținând cont de lema 1 din acest paragraf obținem:

$$b) \quad (P_1 + P_2, P_3) = (P_1, P_3) + (P_2, P_3)$$

Pe baza proprietății că defectul de normă este o funcțională omogenă prin (4.8) deducem:

$$c) \quad (\alpha P_1, P_2) = \alpha (P_1, P_2)$$

Considerînd $P \neq 0$ înseamnă că cel puțin una din mărimile p sau q sînt nenule și atunci expresia:

$$(P, P) = p_1^2 + q_1^2 + \Delta^2$$

este nenulă și de asemenea nu poate fi negativă fiind nomă de pătrate deci avem:

$$d) \quad (P, P) \geq 0 \quad \text{pt. } P \neq 0$$

Dar aceste patru condiții nu sînt altceva decît axiomele produsului scalar și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Cristescu, Analiză funcțională.
2. G. Șabac, Matematici speciale vol. I.
3. I. Suslov, Mecanică rațională, vol. I.

Primită la redacție la 1.VI.1969.

Institutul de mine, Petroșani

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ТОЧЕК С СЕМЕЙСТВОМ КООРДИНАТ

Краткое содержание

В работе, исходя из пространства скользящих векторов, вводится пространство с семейством координат, в котором определяются действия, по отношению к которым пространство организуется как векторное.

Определено также понятие нормы и скалярного произведения, по отношению к которым пространство организуется как гильбертовое.

UN ESPACE DES POINTS À FAMILLES DE COORDONNÉES

Résumé

En partant de l'espace des vecteurs glissants, on introduit l'espace à familles de coordonnées, où l'on définit les opérations par rapport auxquelles on fait l'organisation comme espace vectoriel.

De même, l'on définit les notions de norme et de produit scalaire, par rapport auxquelles on fait l'organisation comme espace de Hilbert.

THE FINITE DIFFERENCE METHOD USED TO COMPUTE BEAMS ON ELASTIC MEDIUM

V. POP and GHOLAMREZA MASRI

The problem of beams on elastic medium has been analyzed and solutions have been prepared for a number of various types of loading and boundary conditions [1], [2], [3]. Most of these solutions are based on Winkler's hypothesis that the contact pressure between the beam and the medium is proportional to the deflection of the beam.

Using this hypothesis the shape of the deflected neutral line of a beam can be expressed as a differential equation of the fourth order

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = q(x) \quad (1)$$

Many authors have used trigonometric and hyperbolic functions in order to express the solution of equation (1).

A great deal of time and laborious work is needed to compute practical cases using such solutions. This is especially the case when it is necessary to compute the magnitude of the deflection, slope, bending moment, and shear force at many sections along of the beam. For quick calculations it is more convenient to express equation (1) by a set of linear equations and to solve it by means of a computer or a desk calculator.

Having the solution of equation (1), the slope, bending moment, and shear force can be expressed as functions of $y(x)$, using the differential relationships which exist between these magnitudes:

$$\theta = \frac{dy}{dx}; \quad M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad Q = -EI \frac{d^3 y}{dx^3}; \quad (2)$$

All these derivatives can be transformed by finite differences into convenient mathematical relations which are suited to computers.

Let us assume that for a given finite beam on elastic medium as that shown in fig. 1 subjected to external loads we know the shape of neutral line. The values of... $y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, \dots$, which are the deflections at... $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, \dots$ being known, the relations (2) can be rewritten as central

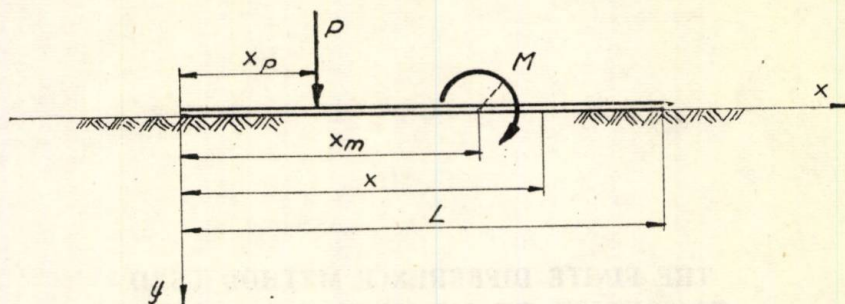


Fig. 1

difference expressions, [4].

$$\theta_n = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\Delta x} (y_{n+1} - y_{n-1}) \quad (3)$$

$$M_n = -EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{EI}{\Delta x^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) \quad (4)$$

$$Q_n = -EI \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{EI}{2\Delta x^3} (y_{n-2} - 2y_{n-1} + 2y_{n+1} - y_{n+2}) \quad (5)$$

$$\text{and } \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{\Delta x^4} (y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}) \quad (6)$$

Substituting (6) into the differential equation (1) we get the linear equation

$$y_{n-2} - 4y_{n-1} + (6 + \gamma)y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2} = q(x) \frac{b\Delta x^4}{EI} \quad (7)$$

where $\gamma = k_s b \Delta x^4 / EI$ is a dimensionless characteristic of the beam.

When the second term of equation (7) is set equal to 1, the roots of the equations will become dimensionless coefficients. These are more convenient for the analysis of different types of beams and external loads.

With this consideration equation (7) can be rewritten in the following manner:

$$w_{n-2} - 4w_{n-1} + (6 + \gamma)w_n - 4w_{n+1} + w_{n+2} = 1 \quad (8)$$

Equation (8) will have the same shape for all the loaded segments, and zero will be substituted for 1 on the right hand side for unloaded points. Due to the boundary conditions at the ends of the beam, the shape of the equations for the first and the last three segments will vary with the beam type considered.

Writing equation (8) for each midpoint of the segments „ Δx “, we get a set of linear equations with as many unknowns as the number of the chosen segments. The roots of these equations will be the deflections at the points

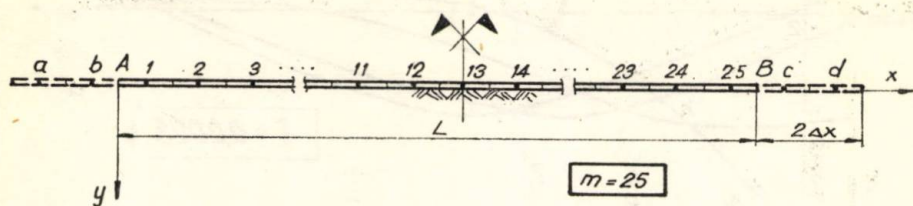


Fig. 2

... $n-1$, n , $n+1$, If the number of these segments is increased, the accuracy of the results will increase, but the mathematical computations will become more complicated. A trial computation has shown that 25 would be a suitable number of equal segments to which the beam has to be divided.

In order to illustrate the method the case of a beam with free ends, divided into 25 equal segments shown in fig. 2 will be further analysed.

Two fictitious segments must be added at each end of the beam. These are required in order to write equation (8) for the segments 1, 2, 24, and 25, and also in order to include the boundary conditions. From boundary conditions, at $x=0$ and $x=L$, we get:

$$\begin{aligned} w_a &= 3w_1 - 2w_2; & w_b &= 2w_1 - w_2 \\ w_c &= 2w_{25} - w_{24}; & w_d &= 3w_{25} - 2w_{24} \end{aligned} \quad (9)$$

Using these values we can write equation (8) for each segment of the beam and get a set of linear equations which written in short matricial form will be:

$$AW = B \quad (10)$$

Equation (10) was solved by means of an I.B.M. 7094 computer at the University of Illinois U.S.A. [5] and the program is presented in appendix 2. Variation of deflection with gamma are presented in fig. 3.

The values of $w_1, \dots, w_n$ having been determined and using expressions (3) to (5), deflection, slope, bending moment and shear force at any segment along a beam subjected to a concentrated force P can be calculated by the following formulae:

$$y_n = \frac{w_n}{m^3} \frac{PL^3}{EI} \quad (11)$$

$$\theta_n = - \frac{(w_{n-1} - w_{n+1})}{2m^2} \frac{PL^2}{EI} \quad (12)$$

$$M_n = - \frac{w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}}{m} PL \quad (13)$$

$$Q_n = \frac{1}{2} (w_{n-2} - 2w_{n-1} + 2w_{n+1} - w_{n+2}) P \quad (14)$$

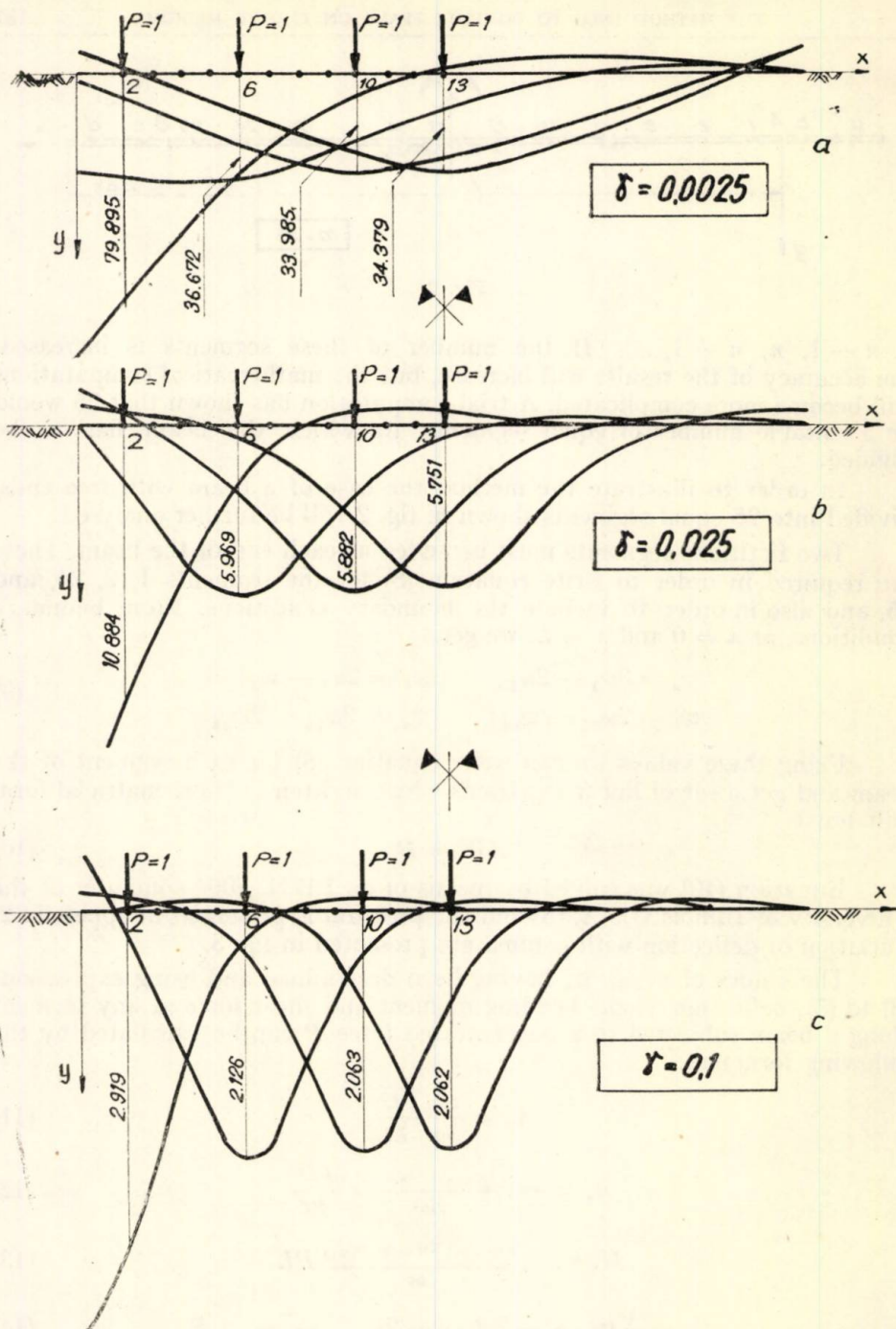


Fig. 3

The difference between the results of the present method which uses central differences, and the results obtained with trigonometric and hyperbolic functions is found to be less than 1.5 per cent and the time necessary to solve the same problem is about ten times less.

APPENDIX 1 — NOTATIONS

The following symbols have been used in this article:

- b = width of beam;
- EI = stiffness of beam;
- k and k_s = coefficients of subgrade reaction;
- L = length of beam;
- $m = \frac{L}{\Delta x}$;
- M_n = computed moment at point n ;
- $n-1, n, n+1$ = midpoints of segments $(\Delta x)_{n-1}$, $(\Delta x)_n$ and $(\Delta x)_{n+1}$;
- P = externally applied concentrated force;
- Q_n = shear force at point n ;
- $q(x)$ = intensity of external load
- y_{n-1}, y_n, y_{n+1} = deflections of beam at locations x_{n-1}, x_n, x_{n+1} , or at points $n-1$, n and $n+1$;
- Δx = length of segments of the divided beam;
- θ_n = slope at point n ;
- w_n = dimensionless coefficients of deflection for beam at point n .

APPENDIX 2

University of Illinois, Fastran Compiler

```

DIMENSION A (25,25)
1 RIT 7,100, GAMMA
DO 2 I = 1,25
DO 2 J = 1,25
2 A(I, J) = 0
DO 3 I = 3,23
A(I, I-2) = 1
A(I, I-1) = -4
A(I, I) = 6 + GAMMA
A(I, I+1) = -4
3 A(I, I+2) = 1
A(1, 1) = 1 + GAMMA
A(1, 2) = -2
A(1, 3) = 1
A(2, 1) = -2
A(2, 2) = 5 + GAMMA
A(2, 3) = -4
A(2, 4) = 1
A(24,22) = 1
A(24,23) = -4
A(24,24) = 5 + GAMMA
A(24,25) = -2

```

```

A(25,23) = 1
A(25,24) = -2
A(25,25) = 1 + GAMMA
CALL INVERT (A,25)
WOT 6,4
WOT 6,5 GAMMA
WOT 6,300 (K, K = 1,7)
DO 30 I = 1,25
WOT 6,20, I, (A(I,J),J = 1,7)
30 CONTINUE
WOT 6,5, GAMMA
WOT 6,300, (K,K = 8,14)
DO 10 I = 1,25
WOT 6,20, I, (A(I,J),J = 8,14)
10 CONTINUE
GO TO 1
100 FORMAT (F20.8)
4 FORMAT (1H1)
5 FORMAT (10X, 26H INFLUENCE
LINE FOR GAMMA=,F10.8,/)
20 FORMAT (5X, 15,5X,7E13.5)
300 FORMAT (10X,7I13,/)
END

```


REFERENCES

1. Timoshenko, S., "Strength of Materials," Prt II, D'Van Nostrand Co., Inc., 1930
2. Umansky, A. A., "Analysis of Beams on Elastic Foundation" Central Research Institute of Auto-Transportation, Leningrad, 1933 (in Russian).
3. Hetenyi, M., "Beams on Elastic Foundation" Ann Arbor: The Univ. of Michigan Press, 1946
4. Ping-Chun Wang, "Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics with Applications to Computers" John Wiley and Sons, Inc., New York
5. D. V. Pop "Design of Continuous Footings on Elastic Foundations by the Finite Difference Method" Univ. of Illinois, Illinois, U.S.A., 1967.

Received on 18.10. 1969

Politechnical Institute, Cluj
University of Illinois, Urbana. Illinois, U.S.A.

UEBER DAS STICHPROBENPROBLEM

TIBERIU POSTELNICU*)

EINLEITUNG

Bei der Beschreibung biologischer Sachverhalte durch ein statistisches Modell ist es oft zweckmässig, mehrdimensionale Zufallsvariable zu verwenden. So ist es zum Beispiel sinnvoll, bei bestimmten medizinischen Fragestellungen gleichzeitig den Blutdruck, die Puls- und die Atemfrequenz eines Patienten sowie den Schweregrad der Erkrankung zu betrachten. Bei psychologischen Untersuchungen etwa kann es interessant sein, gleichzeitig das Geschlecht und den Intelligenzquotienten zu erfassen. Korn- und Strohergrad sowie Nährstoffgehalt einer Pflanze bilden zusammen eine mehrdimensionale Zufallsvariable, die zur Beurteilung des Ertrags im Pflanzenbau Verwendung findet.

Die Komponenten der mehrdimensionalen Zufallsvariablen können unterschiedliche Struktur besitzen. In der Praxis unterscheidet man im allgemeinen zwei Klassen von Komponenten: die qualitativen und die quantitativen Merkmale.

Beispiele für qualitative Merkmale sind der Schweregrad der Erkrankung (primär chronische Polyarthritis der Stadien I, II und III) oder das Geschlecht. Blutdruck und Pulsfrequenz sind Beispiele für quantitative Merkmale.

Die Klasifizierung der Komponenten einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen wird durch Begriffe aus der Praxis nahegelegt. Die entsprechende statistische Formulierung dieses Tatbestands ergibt sich, wenn man qualitativ durch diskret, quantitativ durch stetig und Merkmal durch Zufallsvariable ersetzt.

Die Fragestellungen, die in der Praxis durch die Analyse mehrdimensionaler Zufallsvariablen bearbeitet werden, lassen sich grob in zwei Typen, nämlich in 1-Stichproben- und in Mehr-Stichprobenprobleme, unterteilen.

Zum 1-Stichprobenproblem gehört etwa die Beantwortung der Frage, ob in einer bestimmten Grundgesamtheit zwischen den diskreten und den stetigen Zufallsvariablen ein Zusammenhang besteht (z. B.: Besteht bei

*) Bearbeitet während des Aufenthaltes als Humboldt-Dezertenstipendiat im Institut für Angewandte Mathematik und Informatik der Universität Bonn.

10jährigen Kindern ein Zusammenhang zwischen dem Geschlecht und dem Intelligenzquotienten?)

Der Vergleich mehrerer Gruppen von Individuen, die durch eine mehrdimensionale Zufallsvariable charakterisiert werden, führt auf das Mehr-Stichprobenproblem. Die zugrunde liegende statistische Fragestellung lautet: Unterscheiden sich die Erwartungswerte der mehrdimensionalen Zufallsvariablen in den einzelnen Gruppen? (z. B.: Kann man zwischen Schockpatienten mit einer günstigen Prognose und solchen mit einer ungünstigen Prognose unterscheiden, wenn man als Komponenten der mehrdimensionalen Zufallsvariablen den Blutdruck, das Herzschlagvolumen und die Zyanose (ja oder nein) verwendet?)

1-STICHPROBENPROBLEM

Wir nehmen nun an, dass die Komponenten der mehrdimensionalen Zufallsvariablen folgendermassen geordnet seien:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_d \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_s \end{pmatrix}$$

Dabei sind $X_0, X_1, \dots, X_d$ diskrete und $Y_1, \dots, Y_s$ stetige Zufallsvariable. Im folgenden sollen 3 Fälle unterschieden werden:

$$(1) \ d = 1, \ s = 1$$

$$(2) \ d > 1, \ s = 1$$

$$(3) \ d = 1, \ s > 1$$

Dabei wird (1) ausführlicher als (2) und (3) behandelt und durch ein praktisches Beispiel erläutert. Es werden nur Ergebnisse mitgeteilt; Herleitungen und Beweise wurden weggelassen. Sie können z. B. der am Schluss der Arbeit zusammengestellten Literatur entnommen werden.

$$(1) \ d = 1, \ s = 1$$

Die Komponenten der 2-dimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) mögen folgenden Bedingungen genügen:

X nehme die Werte 0 und 1 an, und zwar sei $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p = q$.

Y sei unter der Bedingung $X = 1$ ($X = 0$) normalverteilt mit dem Erwartungswert μ_1 (μ_0) und der Varianz σ^2 .

Dann ergibt sich für

$$\rho = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

als Mass für den Zusammenhang zwischen X und Y

$$\rho = \Delta \sqrt{pq/(1 + pq\Delta^2)}$$

mit $\Delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma$. Der Korrelationskoeffizient ρ wird im englischen Sprachgebrauch als point-biserial correlation coefficient bezeichnet. Er ist dann und nur dann 0, wenn $\mu_1 = \mu_0$.

Zur Beantwortung der Frage, ob in der Grundgesamtheit zwischen X und Y ein Zusammenhang besteht, d. h. zum Testen der Hypothese $H_0: \rho = 0$ gegen die Hypothese $H_1: \rho \neq 0$ geht man von der Stichprobenfunktion

$$r = (\sum X_a Y_a - n \bar{X} \bar{Y}) / \sqrt{\sum (X_a - \bar{X})^2 \sum (Y_a - \bar{Y})^2}$$

$$\alpha = 1, \dots, n$$

als Schätzfunktion für ρ aus (n ist der Stichprobenumfang).

Die Funktion

$$T = r \sqrt{(n-2)/(1-r^2)}$$

besitzt unter H_0 eine t -Verteilung mit $n-2$ Freiheitsgraden, Daraus ergibt sich als Test von H_0 gegen H_1 bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α :

$$H_0 \text{ wird } \begin{array}{l} \text{abgelehnt} \\ \text{angenommen} \end{array} \quad \text{wenn } \begin{array}{l} |T_s| > t_\alpha \\ |T_s| < t_\alpha \end{array}.$$

Den kritischen t -Wert t_α erhält man aus der Beziehung $P(|T| > t_\alpha) = \alpha$. T_s ist der Wert der Funktion T für die vorliegende Stichprobe.

Eine einfache Umformung von T ergibt, dass dieser Test dem t -Test für $H_0: \mu_1 = \mu_0$ gegen $H'_1: \mu_1 \neq \mu_0$ äquivalent ist. (Da $\rho = 0$ dann und nur dann, wenn $\mu_1 = \mu_0$, sind H'_0 und H_0 sowie H'_1 und H_1 identisch).

Für das im Anhang aufgeführte Beispiel ergeben sich folgende Werte der Stichprobenfunktionen r und T :

	Gruppe A	Gruppe B
r	0,76	0,82
T	8,54	10,15

Da bei 52 Freiheitsgraden und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% der kritische t -Wert 2,67 beträgt, besteht in beiden Gruppen ein gesicherter

Zusammenhang zwischen dem Urteil des Patienten über seinen Schlaf und dem Urteil des Untersuchers über den Schlaf des Patienten.

$$(2) \quad d > 1, \quad s = 1$$

Die Komponenten der Zufallsvariablen $(X_0, \dots, X_d, Y)'$ mögen folgenden Bedingungen genügen:

X_i nehme die Werte 0 und 1 an, und zwar sei

$$P(X_i = 1) = p_i \text{ für } i = 0, 1, \dots, d \text{ mit}$$

$$\sum p_i = 1 \text{ und } \sum X_i = 1.$$

Y sei unter der Bedingung $X_i = 1$ für alle i normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 (σ^2 ist also unabhängig von i).

Als Mass für den Zusammenhang zwischen Y und $(X_0, X_1, \dots, X_d)'$ bietet sich der multiple Korrelationskoeffizient an, für den sich die Beziehung

$$\rho^2 = \sum p_i \Delta_i^2 / (1 + \sum p_i \Delta_i^2)$$

ergibt, wobei $\Delta_i = (\mu_i - \mu) / \sigma^2$ und $\mu = \sum p_i \mu_i$. Als Schätzfunktion für ρ^2 wird die Stichprobenfunktion

$$r^2 = \sum_i n_i (\bar{Y}^{(i)} - \bar{Y})^2 / \sum_\alpha (Y_\alpha - \bar{Y})^2$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n$$

(n ist der Stichprobenumfang)

verwendet. Dabei gilt

$$n_i = \sum_\alpha X_{i\alpha}, \quad \bar{Y} = \sum_\alpha Y_\alpha / n$$

$$\bar{Y}^{(i)} = \sum_\alpha Y_\alpha X_{i\alpha} / n_i$$

Die Zufallsvariable

$$Z = \left(\frac{n-d-1}{d} \right) \frac{r^2}{1-r^2}$$

ist unter der Hypothese $H_0: \rho^2 = 0$ F -verteilt mit d und $n-d-1$ Freiheitsgraden. Daraus ergibt sich als Test von H_0 gegen $H_1: \rho^2 \neq 0$ bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α :

$$H_0 \text{ wird } \begin{array}{l} \text{abgelehnt} \\ \text{angenommen} \end{array} \text{ wenn } \begin{array}{l} Z_s > F_\alpha \\ Z_s \leq F_\alpha \end{array}$$

Den kritischen F -Wert F_α erhält man aus der Beziehung $P(Z > F_\alpha) = \alpha$. Z_s ist der Wert der Funktion Z für die vorliegende Stichprobe.

Dieser Test ist äquivalent dem F -Test für $H'_0: \mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_d$ gegen $H'_1: \mu_i \neq \mu_j$ für mindestens ein Indexpaar (i, j) mit $i \neq j$ (einfache

Varianzanalyse).

$$(3) \quad d = 1, \quad s > 1$$

Die Komponenten der Zufallsvariablen $(X, Y_1, \dots, Y_s)$ mögen folgenden Bedingungen genügen:

X nehme die Werte 0 und 1 an, und zwar sei $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p = q$.

$(Y_1, \dots, Y_s)$ sei unter der Bedingung $X = 1$ ($X = 0$) normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu^{(1)}$ ($\mu^{(0)}$) und der Kovarianzmatrix, Σ . Dabei sei $\mu^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_s^{(k)})'$ für $k = 0, 1$.

Als Mass für den Zusammenhang zwischen X und $(Y_1, \dots, Y_s)'$ bietet sich der multiple Korrelationskoeffizient an, für den sich die Beziehung

$$\rho^2 = \frac{pq(\mu^{(0)} - \mu^{(1)})' \Sigma^{-1}(\mu^{(0)} - \mu^{(1)})}{1 + pq(\mu^{(0)} - \mu^{(1)})' \Sigma^{-1}(\mu^{(0)} - \mu^{(1)})}$$

ergibt. Als Schätzfunktion für ρ^2 wird die Stichprobenfunktion

$$r^2 = \frac{(n_0 n_1 / n(n-2)) (\bar{Y}^{(0)} - \bar{Y}^{(1)})' S^{-1} (\bar{Y}^{(0)} - \bar{Y}^{(1)})}{1 + (n_0 n_1 / n(n-2)) (\bar{Y}^{(0)} - \bar{Y}^{(1)})' S^{-1} (\bar{Y}^{(0)} - \bar{Y}^{(1)})}$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n$$

(n ist der Stichprobenumfang) verwendet.
Dabei gilt:

$$n_1 = \sum X_\alpha, \quad n_0 = n - n_1$$

$$\bar{Y}_i = Y_{i\alpha} / n, \quad \bar{Y}_i^{(1)} = \sum X_\alpha Y_{i\alpha} / n_1, \quad \bar{Y}_i^{(0)} = \sum (1 - X_\alpha) Y_{i\alpha} / n_0$$

$$\bar{Y}^{(1)} (\bar{Y}_1^{(1)}, \dots, \bar{Y}_s^{(1)})', \quad \bar{Y}^{(0)} = (\bar{Y}_1^{(0)}, \dots, \bar{Y}_s^{(0)})'$$

und S ist die Stichproben-Kovarianzmatrix.
Die Zufallsvariable

$$T^2 = (n-2) \frac{r^2}{1-r^2}$$

ist unter der Hypothese $H_0: \rho^2 = 0$, T^2 — verteilt nach HOTELLING. Daraus folgt, dass

$$Q = \frac{T^2}{n-2} \left(\frac{n-s-1}{s} \right)$$

F -verteilt mit s und $n-s-1$ Freiheitsgraden ist.

Als Test für H_0 gegen $H_1: \rho^2 \neq 0$ ergibt sich also bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α :

$$H_0 \text{ wird} \quad \begin{array}{l} \text{abgelehnt} \\ \text{angenommen} \end{array} \quad \text{wenn} \quad \begin{array}{l} Q_s > F_\alpha \\ Q_s \leq F_\alpha \end{array}$$

Den kritischen F -Wert F_α erhält man aus der Beziehung $P(Q > F_\alpha) = \alpha$. Q , ist der Wert der Funktion Q für die vorliegende Stichprobe.

Dieser Test ist äquivalent dem Test für $H_0: \mu^{(1)} = \mu^{(0)}$ gegen $H_1: \mu^{(1)} \neq \mu^{(0)}$.

ERGAENZENDE BEMERKUNGEN

Alle bisher eingeführten Schätzfunktionen für die Korrelationskoeffizienten sind Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen.

Zu jedem Test von H_0 gegen H_1 kann man die Gütefunktion (engl. power function) angeben.

Will man Hypothesen der Art $H_0: \rho^2 \neq c$, wobei c nicht notwendig 0 zu sein braucht, gegen $H_1: \rho^2 = c$ testen oder ein Konfidenzintervall für den Korrelationskoeffizienten berechnen, so kann man dazu die in der Literatur angegebenen asymptotischen Verteilungen der Schätzfunktionen verwenden.

In den vorangegangenen Abschnitten war aufgefallen, dass zu jedem Test für den Korrelationskoeffizienten ein äquivalenter Test für die Mittelwerte existiert. Ursache für diesen Zusammenhang ist folgender Sachverhalt:

Die in (1) (2) und (3) eingeführten Korrelationskoeffizienten sind kanonische Korrelationskoeffizienten. Unter den dort gemachten Verteilungsannahmen sind die kanonischen Korrelationskoeffizienten dann und nur dann 0, wenn die Mittelwerte gleich sind.

Für den Fall $d > 1$, $p > 1$ führte WILKS den sogenannten Vektor-Korrelationskoeffizienten ein. Der entsprechende Test auf Zusammenhang zwischen diskreten und stetigen Komponenten ist äquivalent dem Test auf Unterschiede zwischen den Gruppen bei der multivariaten Varianzanalyse.

k-STICHPROBENPROBLEM ($k > 1$)

Als Beispiel für das k -Stichprobenproblem wird im folgenden der Fall $k = 2$ diskutiert.

Die Komponenten der mehrdimensionalen Zufallsvariablen $(X_0, X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_s)'$ mögen folgenden Bedingungen genügen:

X_i nehme die Werte 0 und 1 an, und zwar sei

$P(X_i = 1) = p_i$ für $i = 0, 1, \dots, d$ mit $\sum p_i = 1$ und $\sum X_i = 1$,

$(Y_1, \dots, Y_s)'$ sei für $i = 0, 1, \dots, d$ unter der Bedingung $X_i = 1$ normalverteilt mit dem Erwartungswert μ_i und der Kovarianzmatrix Σ . Dabei sei $\mu_i = (\mu_{1i}, \dots, \mu_{si})'$.

Die Lösung des 2-Stichprobenproblems besteht nun darin, einen Test zu finden, der es gestattet zu prüfen, ob die Parameter $p_0, p_1, \dots, p_d, \mu_1, \dots, \mu_s$ in 2 verschiedenen Grundgesamtheiten übereinstimmen. D. h. wir wollen die Hypothese

$H_0: (p^{(1)}, \mu_i^{(1)}) = (p^{(2)}, \mu_i^{(2)}), i = 0, 1, \dots, d$ gegen die Alternativhypothese

$H_1: (p^{(1)}, \mu_i^{(1)}) \neq (p^{(2)}, \mu_i^{(2)})$ für mindestens ein i testen. Hierbei gibt der hochgestellte Index die Gruppennummer an, der Vektor p hat als Komponenten die p_i mit $i = 0, 1, \dots, d$.

Es sollen folgende Abkürzungen gelten:

n_j = Umfang der Stichprobe aus der Grundgesamtheit j , $j = 1, 2$

$r_i^{(j)}$ = Anzahl der Beobachtungen aus der Grundgesamtheit j mit $X_i = 1$

$\bar{r}_i^{(j)} = r_i^{(j)} / n_j$, $\bar{r}_d^{(j)} = (\bar{r}_1^{(j)}, \dots, \bar{r}_d^{(j)})'$

$\bar{Y}^{(j)}$ = Vektor aus den Stichprobenmittelwerten der stetigen Komponenten für die Grundgesamtheit j

$$\bar{Z}^{(j)} = \begin{pmatrix} \bar{r}_d^{(j)} \\ \bar{Y}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix},$$

S_{xx} , S_{xy} , S_{yy} sind die Stichproben-Kovarianzmatrizen für $(X_1, \dots, X_d)'$; $(X_1, \dots, X_d)$ und $(Y_1, \dots, Y_s)$ sowie $(Y_1, \dots, Y_s)'$,

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{Z}^{(1)} - \bar{Z}^{(2)})' S^{-1} (\bar{Z}^{(1)} - \bar{Z}^{(2)})$$

Über die Verteilung von T^2 gibt folgender Satz Auskunft:

Streben n_1 und n_2 gegen unendlich, so dass $n_1/(n_1 + n_2)$ gegen eine positive Zahl strebt und $p_i^{(j)} > 0$ für alle i und j , dann besitzt T^2 eine nichtzentrale χ^2 -Verteilung mit $s + d$ Freiheitsgraden und einen Nichtzentralitätsparameter

$$\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \mu' \Sigma^{-1} \mu.$$

Hierbei sind die ersten d Komponenten von μ

$$p_i^{(1)} - p_i^{(2)}, \quad i = 1, \dots, d.$$

während die restlichen s Komponenten durch

$$\sum_i p_i^{(1)} \mu_i^{(1)} - \sum_i p_i^{(2)} \mu_i^{(2)}$$

gegeben sind.

Daraus ergibt sich als Test von H_0 gegen H_1 bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α :

$$H_0 \text{ wird } \begin{array}{l} \text{abgelehnt} \\ \text{angenommen} \end{array} \text{ wenn } \begin{array}{l} T_s^2 > \chi_\alpha^2 \\ T_s^2 \leq \chi_\alpha^2 \end{array}.$$

Den kritischen χ_α^2 -Wert χ_α^2 erhält man aus der Beziehung $P(T_s^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$. T_s^2 ist der Wert der Funktion T^2 für die vorliegenden Stichproben.

Für unser Beispiel (siehe Anhang) ergeben sich folgende Werte (Gruppe 1 = Medikament-Gruppe, Gruppe 2 = Placebo-Gruppe):

$$d = s = 1$$

$$n_1 = n_2 = 54$$

$$r_1^{(1)} = 34 \quad r_1^{(2)} = 23$$

$$\bar{r}_1^{(1)} = 34/54 \quad \bar{r}_1^{(2)} = 23/54$$

$$\bar{Y}^{(1)} = 12,68 \quad \bar{Y}^{(2)} = 9,5$$

$$\bar{Z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 34/54 \\ 12,68 \end{pmatrix} \quad \bar{Z}^{(2)} = \begin{pmatrix} 23/54 \\ 9,5 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0,243 & 1,562 \\ 1,562 & 16,038 \end{pmatrix}$$

$$T_s^2 = 20,3$$

Da bei 2 Freiheitsgraden und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% der kritische χ^2 -Wert 9,21 beträgt, unterscheiden sich die beiden Gruppen. D. h. diejenigen Probanden, die ein Schlafmittel erhielten, schliefen besser als diejenigen, die ein Placebo bekamen.

Da von T^2 nur die asymptotische Verteilung bekannt ist, wird man den Test nur bei grossen Stichprobenumfängen anwenden. Für Tests bei endlichen Stichprobenumfängen sei auf die Arbeit von AFIFI und ELASHOFF verwiesen. Dort wird der Maximum-Likelihood-Quoziententest besprochen und ein Verfahren diskutiert, das von einem Satz der Informationstheorie ausgeht.

BEISPIEL

Folgende Daten stammen aus einem Schlafmittelversuch: die Gruppe A erhielt ein Schlafmittel, während die Gruppe B mit einem Placebo behandelt wurde. Das Merkmal X diente zur Erfassung der subjektiven Beurteilungen der Schlafqualität durch den Patienten $X = 1$: gut geschlafen, $X = 0$: schlecht geschlafen, das Merkmal Y gibt das Urteil des Untersuchenden über den Schlaf des Patienten wieder. Der aktuelle Wert Zufallsvariablen Y wurde durch Indexbildung aus jeweils 10 Beobachtungen während der Nacht ermittelt.

Grupa A

X	Y	X	Y	X	Y
1	18,5	0	8,5	0	12
1	12,5	1	12,5	1	16
1	14	1	16	1	15,5
1	14	0	10,5	0	7
1	15	0	9,5	0	8
0	7	1	16	1	13
1	11	1	14	0	10
1	12	0	11,5	1	15
1	11	0	14,5	1	14
1	12	1	13	0	9,5
1	8	1	15,5	1	17,5
1	13	0	9	1	18
1	16	1	16,5	1	16,5
1	15,5	0	5,5	0	10
1	16	0	9,5	0	9
1	17	1	19,5	1	18,5
0	6	0	9	1	13
1	18	0	6	0	8,5

Grupa B

X	Y	X	Y	X	Y
1	15,5	1	18	1	11,5
0	10	0	9	0	5,5
1	14	1	15,5	0	2
0	8	1	18	1	13,5
1	15	1	16,5	1	11
1	11	0	2	1	10,5
0	11,5	0	9,5	0	3,5
1	12	0	8,5	1	13
0	7	0	4,5	1	12,5
0	6,5	0	4	0	6
0	6	0	6	0	3,5
0	2	1	15,5	0	8
0	11	1	13	0	7
0	10,5	0	7,5	0	5,5
0	9,5	1	14	0	4
1	12,5	1	13	1	12
0	3	0	8	1	10,5
0	6	0	7	1	13

LITERATURVERZEICHNIS

- Afifi, A. A. and Elashoff, R. M. (1969). Multivariate two sample tests with dichotomous and continuous variables. I. The location model. *Ann. Math. Statist.* **40**, 290—298,
- Olkin, I. and Tate, R. F. (1961) Multivariate correlation models with mixed discrete and continuous variables.
Amm. Math. Statist. **32**, 448—465
- Tate, R. F. (1954). Correlation between a discrete and a continuous variable. Point-biserial correlation.
Ann. Math. Statist. **25**, 603—607
- Tate, R. F. (1955). Applications of correlation models for biserial data. *J. Amer. Statist. Assn.* **50**, 1078—1095
- Wilks, S. S. (1935). On the independence of k sets of normally distributed statistical variables.
Econometrica **3**, 309—326

Akademie der S. R. Rumänien
Zentrum für mathematische Statistik

In der Redaktion am 25.II.1970.

ASUPRA PROCEDEELOR DE ÎNLOCUIRE OPTIMALE

V. POSTELNICU

Fie X o variabilă aleatoare care reprezintă durata de funcționare a unui element. Pentru asigurarea unei funcționări continue în intervalul $[0, t]$ elementul va fi înlocuit la prima cădere, adică la momentul x_1 , apoi la a doua cădere adică la momentul $S = X_1 + X_2$ s.a.m.d. pînă la momentul $S_{N(t)} = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$ unde $N(t) = \sup (n | S_n \leq t)$.

În multe situații însă o cădere poate avea consecințe grave pentru întregul proces, astfel încît se impune înlocuirea elementului înainte de cădere. Un procedeu de înlocuire constă în fixarea unei succesiuni de momente de înlocuire $T_1, T_2, \dots$ stabilite pe baza unor criterii care trebuie să țină seama de caracteristicile variabilei X cît și de costurile de înlocuire. Procedecele de înlocuire cele mai frecvent folosite sînt:

A. *Înlocuirea periodică după vîrstă*, adică elementul se înlocuiește la o anumită vîrstă fixă T sau în caz de cădere;

B. *Înlocuirea periodică în bloc*: elementul este înlocuit la momentele fixe $0, T, 2T, 3T$ sau în caz de cădere.

Scopul elaborării unui plan de înlocuire este optimizarea (în general minimizarea) unei anumite funcții obiective.

O variabilă aleatoare importantă care intervine în această problemă este numărul de înlocuiri pînă la un moment anumit.

Procedecele A au fost studiate de către E. L. Welker (1959), K. F. Drenick (1960) și B. J. Flehinger (1962), iar procedecele B. de către G. Weiss (1956) și Barlow și Prochan (1962). În general toate rezultatele obținute se bazează pe ipoteza că rata căderii variabilei X , $r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$, unde $F(x) = P[X \leq x]$ și $f(x) = F'(x)$ este crescătoare.

Fie $N_A^*(t)$, respectiv $N_B^*(t)$, numărul căderilor pînă la momentul t cînd se folosește un procedeu A respectiv B de înlocuire.

Sînt importante următoarele rezultate datorate lui R. E. Barlow și F. Proschan [1].

Teorema 1. Dacă F este cu rata căderii crescătoare (IHR) descrescătoare (DHR) atunci

$$P[N(t) \geq n] (\leq) P[N_A^*(t) \geq n] \geq (\leq) P[N_B^*(t) \geq n];$$

egalitatea avînd loc pentru repartiția exponențială

$$F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$$

Corolar 1: Fie $H(t) = EN(t)$ atunci,

$$1) H(t) \geq (\leq) E[N_A^*(t)] \geq (\leq) E[N_B^*(t)]$$

$$2) H(t) \geq (\leq) kH(t/k)$$

$$3) H(t) \leq (\geq) t/\mu$$

$$4) H(t) \leq (\geq) H(t+h) - H(t)$$

unde $\mu = EX$.

Fie acum $N_A(t)$ și $N_B(t)$ numărul total de înlocuiri în intervalul $[0, t]$ cînd se folosește un procedeu A, respectiv B. Oricare ar fi $F(x)$ are loc

Teorema 2 (de comparație):

$$P[N(t) \geq n] \leq P[N_A(t) \geq n] \leq P[N_B(t) \geq n]$$

pentru orice $t > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Rezultă de aici următorul corolar important pentru aplicații

Corolarul 2.

$$1) H(t) \leq E[N_A(t)] \leq E[N_B(t)]$$

$$2) H(t) \leq k H(t/k) + k$$

$$3) H(t) \geq t/\mu - 1$$

Următoarea teoremă sintetizează principalele proprietăți asimptotice ale proceselor $N(t)$, $N_A(t)$, $N_B(t)$.

Teorema 3:

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)/t = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 1/\mu$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} N_A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_A(t)]/t = F(t) / \int_0^t F(x) dx$$

$$3) \lim_{t \rightarrow \infty} N_B(t)/t = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_B(t)]/t = H(T)/T$$

Teoremele 1, 2, 3 permit compararea procedeelor de înlocuire ținînd seama de numărul de căderi sau numărul total de înlocuiri.

În realitatea nu se poate face o comparație judicioasă între diferitele procedee decît dacă se ține seama și de costuri. Procedul de înlocuire trebuie să aibă la bază un criteriu de comparare a costului tuturor căderilor

cu costul tuturor înlocuirilor planificate. Un procedeu de înlocuire elaborat pe baza caracteristicilor repartiției F cât și pe baza costurilor îl vom numi plan de înlocuire.

În [2] se studiază planuri de înlocuire cu costuri constante, avînd la bază procedee de tip A.

Fie c_1 totalitatea costurilor rezultînd dintr-o cădere și c_2 — totalitate costurilor rezultînd dintr-o înlocuire planificată. Desigur, condiția $c_1 > c_2$ este obligatorie altfel elaborarea planului pierzîndu-și sensul.

Fie $N(t)$ numărul căderilor în $[0, t]$ și $N_2(t)$ numărul înlocuirilor care nu sînt căderi (înlocuiri planificate).

Planul de înlocuire va trebui deci să minimizeze sau să maximizeze o funcție obiectiv în care intervine valorile c_1 , c_2 și variabilele $N_1(t)$ $N_2(t)$.

Funcția obiectiv folosită în [1] în acest scop este costul mediu al înlocuirii în perioada $[0, t]$.

$$(1) C(t) = c_1 E[N_1(t)] + c_2 E[N_2(t)]$$

Pentru perioade de exploatare mari se folosește ca funcție obiectiv costul mediu pe unitatea de timp:

$$(2) \lim C(t)/t$$

Ipoteza costurilor constante este prea restrictivă. În probleme în care intervalul $[0, t]$ este mai lung ipoteza unor costuri constante nu mai poate fi economic plauzibilă.

Un alt avantaj al reconsiderării problemei pentru cazul costurilor variabile este acela că odată cu aceasta se rezolvă (după cum se vede mai jos) în mod automat și problema elaborării unor planuri de înlocuire optime în raport cu funcții obiectiv în care intervin costuri actualizate.

Metoda Monte-Carlo și tehnicile de simulare justifică reconsiderarea problemei în cadrul general în care T este o variabilă aleatoare. În cele ce urmează se generalizează unele rezultate din [1] pentru cazul costurilor de înlocuire variabile și se reia problema existenței planurilor periodice și aleator periodice optime în cazul înlocuirii în bloc.

1. PLANURI STRICT PERIODICE DE TIP A ȘI COSTURI VARIABILE

Fie un plan de înlocuire de tip A strict periodic cu perioadă s și $c_1(x)$ și $c_2(x)$ costul înlocuirii la momentul x a unei căderi respectiv al unei înlocuiri planificate. Notăm cu $C_n(t, a)$ costul mediu în intervalul $[0, t]$ considerînd numai primele n înlocuiri.

Au loc relațiile de recurență

$$C_1(t, s) = \begin{cases} \int_0^t c_1(x) dF(x) & t \leq s \\ \int_0^s C_1(x) dF(x) + c_2(s) \bar{F}(0) & t > s \end{cases}$$

$$C_{n+1}(t, s) = \begin{cases} \int_0^t c_1(x) + C_n(t-x, s) dF(x) & t \leq s \\ \int_0^s c_1(x) + C_n(t-x, s) dF(x) + \{c_2(s) + C_n(t-s, s)\} \bar{F}(x) & t \geq s \end{cases}$$

Teorema 4. Dacă $F(x)$ este continuă și $c_1(x)$ $c_2(x)$ sînt funcții continue atunci există un plan de înlocuire de tip A strict periodic de cost mediu minim.

Demonstrație: $C_n(t, s)$ converge uniform către $C(t, s)$ (costul mediu de înlocuire în intervalul t).

Din relațiile de recurență (1) se poate ușor deduce că $C_n(t, s)$ sînt funcții continue de s în orice punct $s \neq t/i$ deci $C(t, s)$ este o funcție continuă des pentru orice punct $s \neq t/i$, $i = 1, 2, \dots$ și de deci $C(t, s)$ își atinge minimumul în s .

2. PLANURI ALEATOR PERIODICE DE TIP A ȘI COSTURI VARIABLE

Teorema 5: Dacă $F(x)$, $c_1(x)$ și $c_2(x)$ sînt continue, atunci există un plan de înlocuire de tip A aleator periodic de cost mediu minim

Demonstrație: Fie $G(t)$ funcția de repartiție a intervalului de înlocuire T și $K(t)$ costul mediu de înlocuire pînă la momentul t pentru planul aleator periodic determinat prin $G(t)$.

$$K(t, G) = \int_0^t [c_1(x) + K(t-x)] \bar{G}(x) dF(x) + \int_0^t [c_2(x) + K(t-x)] \bar{F}(x) dG(x).$$

Fie $G_n(x)$ un șir de funcții de repartiție pentru care $K_n(t) \rightarrow \inf \{K(t)\}$ în clasa planurilor aleatoare periodice.

După teorema de compactitate a lui Helly rezultă că există o funcție monotonă G_0 astfel încît $G_n(x) - G_0(x)$ în orice punct de continuitate al lui G_0 , G_0 poate fi completat astfel încît să fie o funcție de repartiție.

Din (2) rezultă că $K_n(t_1) \rightarrow K_0(t_1)$ în orice punct $t_1 < t$ care este un punct de continuitate al lui G_0 .

3. PLANURI DE ÎNLOCUIRE ÎN BLOC, STRICT PERIODICE ȘI COSTURI VARIABLE

Presupunem costurile funcții continue de timp $c_1(t)$ $c_2(t)$. Costul de înlocuire pînă la momentul t pentru un plan de înlocuire în bloc strict periodic de perioadă s este

$$C(t, s) = c_1(S_1^{(1)}) + c_1(S_2^{(1)}) + \dots + c_1(S_{N^{(1)}(s)}^{(1)}) + c_2(s) + c_1(s + S_1^{(2)}) + \\ + c_2(s + S_2^{(2)}) + \dots + c_1(s + S_{N^{(2)}(s)}^{(2)}) + c_2(s) \\ + c_1[(k-1)s + S_1^{(k)}] + c_1[(k-1)s + S_2^{(k)}] + \dots + c_1[(k-1)s + S_{N^{(k)}(s)}^{(k)}] + \\ + c_2(ks) + c_1[ks + S_1^{(k+1)}] + c_1[ks + S_2^{(k+1)}] + \dots + c_1[ks + S_{N^{(k+1)}(s)}^{(k+1)}],$$

unde $k = [t/s]$ (partea întreagă) iar $S_j^{(k)}$ sînt realizări ale variabilei S_j .

Variabilele $\mathcal{C}_1(u, s) = \sum_{j=1}^{N(s)} c_1(u + S_j)$ $u = 0, s, 2s$ sînt independente. Deci $K(t, s) = EC(t, s)$ se poate scrie sub forma:

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^k E\mathcal{C}_1(js, s) + \sum_{j=1}^k c_2(js) + E\{c_1(ks + S_1) + \dots + \\ + c_1[ks + S_{N^{(k+1)}(s)}^{(k+1)}]\}$$

Dacă notăm cu:

$$\mathfrak{R}(t, s) = Ec_1(ks + S_1) + \dots + c_1(ks + S_{N^{(k+1)}(s)}^{(k+1)}(t - ks))$$

atunci

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^k E\mathcal{C}_1(js; s) + \sum_{j=1}^k c_2(js) + \mathfrak{R}(t, s).$$

Lema 1. Dacă F este continuă, atunci $K(t, s)$ este o funcție continuă de s pentru orice $s \neq t/i$.

Demonstrație:

$c_1(ks + S_j)$ este pentru orice j o funcție continuă de s și deci F fiind continuă și $E\mathcal{C}_1(j, s)$ vor fi funcții continue de s . La fel și $c_2(js)$.

Fie acum $s = t/i$ și s_n un șir $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t/i$ $s_n < t/i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k E\mathcal{C}_1(j, s_n) = \sum_{j=1}^k E\mathcal{C}_1(j, t/i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k c_2(j, s_n) = \sum_{j=1}^k c_2(j, t/i)$$

$$R(t, t/i) = 0$$

$K(t, s)$ ia deci pentru $s = t/i$ valori mai mici decît pentru valorile imediat la stînga lui t/i cele două cantități deosebindu-se prin costul unei înlocuiri planificate.

Teorema 6. Dacă F , c_1 și c_2 sînt funcții continue, există un plan de tip B, strict periodic de cost mediu minim.

Demonstrația rezultă imediat de lema 1.

4. ÎNLOCUIREA ÎN BLOC, ALEATOR PERIODICĂ CU COSTURI VARIABILE

Fie $Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ momentele cînd au loc căderile Y_i fiind variabile independente și cu aceeași repartiție.

Vom presupune că înlocuirea are loc în caz de cădere sau la momentele $X_1, X_1 + X_2 + \dots, X_1 + X_2 + X_n, \dots$ unde X_i sînt variabile independente cu aceeași repartiție $G(x)$.

Vom folosi notațiile:

$$\begin{aligned} \overset{x}{S}_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n & \overset{y}{S}_n &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \\ \overset{x}{N}(t) &= \sup \{n; \overset{x}{S}_n \leq t\} & \overset{y}{N}(t) &= \sup \{n; \overset{y}{S}_n \leq t\} \end{aligned}$$

Propoziția 1: $E[\overset{y}{N}(X)] = E[X]/E[Y]$

Demonstrație:

$$\sum_1^{\overset{x}{N}(t)} X_i \leq t \leq \sum_1^{\overset{x}{N}(t)+1} X_i$$

și

$$Y_1^i + \dots + Y_{\overset{y}{N}(X_i)}^i \leq X_i \leq Y_1^i + \dots + Y_{\overset{y}{N}(X_i)}^i + Y_{\overset{y}{N}(X_i)+1}^i$$

Deci

$$\sum_1^{\overset{x}{N}(t)} (Y_1^i + \dots + Y_{\overset{y}{N}(X_i)}^i) \leq \sum_1^{\overset{x}{N}(t)} X_i \leq t \leq \sum_1^{\overset{x}{N}(t)+1} (Y_{\overset{y}{N}(X_i)}^i + Y_{\overset{y}{N}(X_i)+1}^i)$$

$$\frac{\sum_1^{\overset{x}{N}(t)} (Y_1^i + \dots + Y_{\overset{y}{N}(X_i)}^i)}{\overset{y}{N}(X_1) + \dots + \overset{y}{N}(X_{\overset{x}{N}(t)}^x)} \leq \frac{\sum_1^{\overset{x}{N}(t)} X_i}{\overset{x}{N}(t)} \cdot \frac{\overset{y}{N}(t)}{\overset{y}{N}(X_1) + \dots + \overset{y}{N}(X_{\overset{x}{N}(t)}^x)} \leq$$

$$\leq \frac{\sum_1^{\overset{x}{N}(t)+1} (Y_1^i + \dots + Y_{\overset{y}{N}(X_i)+1}^i)}{\overset{x}{N}(X_1) + \overset{y}{N}(X_2) + \dots + \overset{y}{N}(X_{\overset{x}{N}(t)+1}^x)}$$

$$\cdot \frac{\overset{y}{N}(X_1) + \overset{y}{N}(X_2) + \dots + \overset{y}{N}(X_{\overset{x}{N}(t)+1}^x) + \overset{x}{N}(t) + 1}{\overset{y}{N}(X_1) + \overset{y}{N}(X_2) + \dots + \overset{y}{N}(X_{\overset{x}{N}(t)+1}^x)}$$

Variabilele X și Y fiind independente este valabilă legea numerelor mari și se obține când $t \rightarrow \infty$

$$E[X]/E[N(X)] = E[Y]$$

Lema 2. Fie $\{S_i\}$ un șir de variabile aleatoare care satisface condițiile:

$$S_i \geq 0$$

$S_{i+1} \geq S_i$ cu probabilitatea 1 pentru orice i
și f o funcție reală pozitivă definită pe $(0, \infty)$ continuă, monotonă și mărginită.

a) Există atunci o variabilă $S_i^* \leq S_i$ astfel încât

$$\frac{f(S_1) + \dots + f(S_n)}{n} = f(S_n^*)$$

b) Dacă $S_i^{(n)}$ tinde în repartiție către S_i pentru care orice i , atunci și S_i^* tinde în repartiție către S_i pentru orice i .

Demonstrație: Presupunem f monoton crescătoare

$$\frac{f(S_1) + \dots + f(S_n)}{n} = a_n, f(S_1) \leq a_n \leq f(S_n)$$

Funcția f fiind monotonă și continuă există o variabilă S_n^* , $a_n = f(S_n^*), S_1 \leq S_n^* \leq S_n$

$$S_n^* = f^{-1} \frac{f(S_1) + \dots + f(S_n)}{n}$$

f fiind continuă rezultă din convergența în repartiție a șirurilor $S_k^{(i)}$ către S convergența lui $S_k^{*(i)}$ către S_k^*

Fie $c_1(x)$ $c_2(x)$ costul unei înlocuiri respectiv al unei înlocuiri planificate efectuate la momentul x .

Costul total al unui plan de înlocuire $P(X)$ pînă la momentul t va fi:

$$C(t, G) = c_1(S_1^{(1)}) + \dots + c_1(S_{N(X_i)}^{(1)}) + c_2(S_1^x) + c_1(S_1^x + S_1^{(2)}) + \\ + \dots c_1(S_1^x + S_{N(X_2)}^{(2)}) + c_2(S_2^x)$$

$$+ c_1(S_{N(t)-1}^x + S_1^{(N(t))}) + \dots + c_1 \left(S_{N(t)-1}^x + S_{N(X^{(N(t))})}^{(N(t))} \right) + c_2(S_{N(t)}^x) + \\ + c_2(S_{N(t)}^x + S_1^{(N(t)+1)}) + \dots + c_1 \left\{ S_{N(t)}^x + S_{N(t)-S_{N(t)}^x}^{(N(t)+1)} \right\}$$

Teoremă:

Dacă $c_1(x)$, $c_2(x)$ și $F(x)$ sînt funcții continue monotone și marginite atunci există un plan de înlocuire aleatoare în bloc de cost mediu minim.

Demonstrație: Fiind dat un șir de procese de reînnoire cu funcțiile de repartiție G_n și G o funcție de repartiții, dacă $G_n \rightarrow G$ în orice punct de continuitate, atunci oricare ar fi k și t șirurile de variabile $S_k^{(n)}$; $N_n(t)$ converg în repartiție către S_k respectiv $N(t)$. Funcțiile c_1 și c_2 fiind continue monotone rezultă că dacă X_n converge în medie către X , $C(t, G)$ converge în medie către $C(t, G)$ adică $C(t, G_n)$ converge în repartiție către $C(t, G)$.

Fie acum $\lambda = \inf EC(t, G)$ și G_n un șir de funcții de repartiție pentru care $C(t, G_n) \rightarrow \lambda$. Folosind din nou teorema lui Helly rezultă că există o funcție de repartiție G astfel încît:

$$EC(t, G) = \lambda$$

Teorema 8: Dacă $c_1(x)$ și $c_2(x)$ sînt funcții monotone, continue și mărginite, atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t, X)}{t} = \frac{c_1}{E[Y]} + \frac{c_2}{E[X]}$$

unde

$$c_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} c_1(x) \quad c_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} c_2(x)$$

Demonstrație: Folosind lema 2, $C(t, x)$ se mai poate scrie:

$$C(t, X) = \overset{y}{N}(X_1) c_1(S_1^*) + \overset{y}{N}(X_2) c_2(S_2^*) + \dots + \overset{y}{N}(X_{N(t)}^x) c_1(S_{N(t)}^*) + \\ + \overset{y}{N}(t - \overset{x}{S}_{N(t)}^x) c_1(\overset{x}{S}_{N(t)}^x + S^*) + \overset{x}{N}(t) c_2(S).$$

unde

$$\overset{x}{S}_{k-1} \leq \overset{x}{S}_k \leq \overset{x}{S}_{k-1} + \overset{y}{S}_k$$

$$\overset{x}{S}_y \leq S^* \leq \overset{y}{S}^y N(\overset{y}{S}_{N(t)}^y - \overset{x}{S}_{N(t)}^x)$$

$$\overset{x}{S}_1 \leq S \leq \overset{x}{S}_{N(t)}^x$$

$$\frac{C(t, X)}{t} = \frac{\overset{y}{N}(X_1) c_1(S_1^*) + \dots + \overset{y}{N}(X_{N(t)}^x) c_1(S_{N(t)}^*)}{N(t)} \cdot \frac{\overset{x}{N}(t)}{t} + \\ + \frac{\overset{y}{N}(t - \overset{x}{S}_{N(t)}^x) c_1(\overset{x}{S}_{N(t)}^x + S^*)}{t} + \frac{\overset{x}{N}(t)}{t} c_2(S)$$

Dar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overset{y}{N}(t - \overset{x}{S}_{N(t)}^x) c_1(\overset{x}{S}_{N(t)}^x + S^*)}{t} = 0$$

cantitatea de la numărător fiind mărginită, s_i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} c_2(S) = \frac{c_2}{E[X]}$$

după teorema elementară de reînnoire.

Variabilele $N(X_i)$ $c_1(S_i)$ sînt egal mărginite și deci sînt îndeplinite condițiile de valabilitate ale legii tari a numerelor mari.

Fie

$$\gamma_i = E c_1(S_i^*)$$

$$\sum_1^{N(t)} N(X_i) c_1(S_i^*) - \gamma_i E[N(X)] \rightarrow 0,$$

Dar $c_1(S_i^*) \rightarrow c_1$ cu probabilitatea 1 deci și $\gamma_i \rightarrow c_1$ și deci și $\frac{\sum_1^n \gamma_i}{n} \rightarrow c_1$ de unde rezultă că

$$\frac{\sum_1^{N(t)} N(X_i) c_1(S_i)}{N(t)} \rightarrow c_1 E N(X)$$

și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} = c_1 E[N(X)] \frac{1}{E[X]} + \frac{c_2}{E[X]}$$

Ținînd seama de propoziția 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{c_1}{E[X]} + \frac{c_2}{E[X]}$$

Corolarul 3:

Planul de înlocuire în bloc aleator, optim în raport cu costul pe unitatea de timp, aparține subclasei procedeelor de înlocuire în bloc, nealeatoare.

BIBLIOGRAFIE

1. R. E. Barlow F. Proschan, Comparison of replacement policies, and renewal theory implications. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 35, nr. 2, 1964.
2. R. E. Barlow F. Proschan, Planned replacement — „Studies in applied probability and management science, edited by Arrow, Karlin and Scarf, 1962.

Primită la redacție la 15.IX. 1969.

Centrul de statistică
matematică al Academiei
R.S. România, București

ОПТИМАЛЬНЫЕ СПОСОБЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Краткое содержание

В статье [2] Барлоу и Прошан, изучают способы восстановления, которые минимизируют среднюю стоимость $C(t)$ в интервале $[0, t]$ или среднюю стоимость в единице времени, в предположении постоянных стоимостей восстановления C_1 и C_2 .

В настоящей работе изучается также и задача, когда c_1 и c_2 являются функциями времени. Рассматриваются способы восстановления по возрасту и также способы восстановления по средству блоков.

В теоремах 4—7 получаюся условия существования оптимальных способов. В теореме 8 найдена асимптотическая форма стоимости в единице времени.

ON OPTIMAL REPLACEMENT POLICIES

Abstract

In paper [2] Barlow and Proschan considered replacement policies which minimize the expected cost $C(t)$ during $[0, t]$ or the expected cost per unite time $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t}$, when the replacement costs c_1 and c_2 are constants.

The present paper deals with the same problem in the case when c_1 and c_2 are functions of time. Both age replacement policies and block replacement policies are considered.

Theorems 4—5 give conditions for the existence of optimal age replacement policies strictly periodic and random periodic with raport to the expected cost. Theorems 5—7 give similar conditions for the optimal block replacement policies. Theorem 8 gives the asymptotic form of the expected cost per unit time for a random block replacement policy. The proof of this theorem lays on some properties of mixing-renewal processes.

O METODĂ STATISTICĂ PENTRU INTERPRETAREA MĂSURĂTORILOR MAGNITUDINILOR CUTREMURELOR DE PĂMÎNT PRODUSE DE CENTRUL VRANCEA

MIHAELA SĂCUIU și DAN ZORILESCU

Experiența a dovedit că numai o parte din repartițiile ce se întâlnesc în aplicații se dovedesc a fi normale. M. Allais a arătat [1], că numeroase fenomene naturale și economice urmează o repartiție asimetrică.

Punctele $(x, u_p)^*$ din diagrama frecvențelor repartizate asimetric se grupează în jurul unei curbe teoretice a cărei ecuație poate fi scrisă sub forma:

$$u = h(x)$$

unde prin x am notat valorile pe care le ia variabila aleatoare.

Aceasta înseamnă că funcția de repartiție a unei astfel de variabile este dată de:

$$G(x) = \Phi(h(x))$$

de unde urmează că:

$$g(x) = \varphi(h(x))h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(h(x))^2}{2}} h'(x)$$

adică variabila aleatoare $h(X)$ este repartizată normal, ceea ce din punct de vedere teoretic este totdeauna posibil.

Acest fapt prezintă un deosebit interes practic deoarece în multe cazuri se poate lua funcția h sub forma:

$$h(x) = \frac{g(z) - g(r)}{\sigma}$$

unde funcția $g(x)$ nu conține parametrii necunoscuți.

Un exemplu de repartiție asimetrică care printr-o transformare a variabilei aleatoare devine normală o constituie repartiția lognormală.

Definiția 1. Spunem că variabilele aleatoare X urmează o lege lognormală (logaritmul luat într-o bază oarecare a) dacă logaritmul ei urmează o lege normală.

* prin u am notat p quantila unei variabile aleatoare normale $N(0,1)$.

Rezultă deci că densitatea de repartiție $f(x)$ a variabilei aleatoare X ce urmează o lege lognormală este dată de expresia

$$f(x) = \frac{\log_a e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log_a x - \log_a \gamma)^2}{2\sigma^2}}; \quad x \in (0, \infty)$$

unde $\log_a \gamma$ și σ^2 sînt respectiv valoarea medie și dispersia logaritmului $\log_a X$

Din faptul că $\log_a \gamma$ este valoarea medie a variabilei aleatoare $\log_a X$ rezultă că γ este mediana și media geometrică a variabilei aleatoare X .

Momentele repartiției lognormale se calculează după cum urmează:

$$\alpha_n = \frac{\log_a e}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^\infty x^n e^{-\frac{(\log_a x - \log_a \gamma)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{x}$$

Să facem aici transformarea de variabilă

$$x = \gamma^{\sigma z}$$

sau încă

$$z = \frac{1}{\sigma} \log_a \frac{x}{\gamma}; \quad dz = \frac{\log_a e}{\sigma} \frac{dx}{x}$$

așadar:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\gamma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{n\sigma z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\gamma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\ln a n \sigma z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{\gamma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} [z^2 - 2n\sigma z \ln a]} dz = \\ &= \frac{\gamma^n e^{\frac{n^2 \sigma^2 (\ln a)^2}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2 (z - n\sigma \ln a)^2} dz \end{aligned}$$

și deci:

$$\alpha_n = \gamma^n e^{-\frac{n^2 \sigma^2 (\ln a)^2}{2}} = \gamma^n a^{\frac{n^2 \sigma^2}{2 \log_a e}}$$

De aici urmează că valoarea medie a variabilei aleatoare ce urmează o lege lognormală este:

$$\alpha_1 = \gamma a^{\frac{\sigma^2}{2 \log_a e}}$$

iar dispersia

$$\mu = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \gamma^2 a^{\frac{\sigma^2}{\log_a e}} \left(a^{\frac{\sigma^2}{\log_a e}} - 1 \right) = \alpha_1^2 \left(a^{\frac{\sigma^2}{\log_a e}} - 1 \right)$$

Parametrii γ și σ^2 care caracterizează repartiția lognormală, în aplicații, se estimează pe baza selecțiilor. Astfel pentru valoarea medie $\log_a \gamma$ se alege ca cea mai bună estimatie media aritmetică a variabilelor aleatoare normale obținută în n probe:

$$\log_a \gamma^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_a x_i$$

Se observă că $\log_a \gamma^*$ este o variabilă aleatoare normală $N\left(\log_a \gamma, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ și deci γ^* este o variabilă aleatoare lognormală de mediană γ , de dispersie logaritmică $\frac{\sigma^2}{n}$ și de valoare medie $\gamma a^{\frac{\sigma^2}{2n \log_a e}}$.

Pentru n suficient de mare, σ^{**} este asimptotic normal.

În cele ce urmează, noi vom folosi logaritmul în baze 10 în care caz diferitele relații date în general se transcriu cu ușurință. Deși formulele se pot simplifica mai mult folosind logaritmul în baza e , preferăm logaritmul în baza 10 pentru care există tabele în îndemîna oricui fără a mai fi nevoie de vreo transformare prealabilă.

Urmărind declanșarea cutremurelor de pămînt produse de un anumit focar, constatăm că ele se succed în mod aleator.

Puterea unui cutremur de pămînt este caracterizată în focare prin mărimea lui, mărime care variază de la un cutremur la altul tot în mod aleator. Cunoșcînd legea de repartiție a magnitudinilor cutremurelor produse de un anumit focar am putea determina numărul probabil de cutremure de o anumită mărime produse de acel focar într-o unitate de timp, de exemplu într-un an.

Așa dar pentru a rezolva problema predicției referitoare la numărul de cutremure produse de un focar dat, trebuie determinat legea de repartiție a magnitudinilor.

În nota de față ne propunem să indicăm o cale de rezolvare a acestor probleme, pentru cutremurele de pămînt produse de centrul Vrancea. Vom folosi măsurătorile efectuate asupra magnitudinilor cutremurelor cu focarul în Vrancea între anii 1937—1962, măsurători ce sînt înregistrate în lucrarea [4].

Datele acestor măsurători le-am grupat pe intervale, conform cu tabelul 1.

Reprezentînd grafic frecvențele înregistrate, obținem după cum se vede în fig. 1 o curbă a frecvențelor asimetrică.

* Pentru estimarea dispersiei logaritmice se ia prin analogie ca lege normală, următoarea expresie:

$$\sigma^{**} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log_a x_i - \log_a \gamma^*)^2$$

TABEL 1

Nr. crt.	Intervale de magnitudine	Fregvența cutremurelor
1	$M < 2,79$	6
2	2,80—3,19	10
3	3,20—3,39	36
4	3,40—3,59	51
5	3,60—3,79	43
6	3,80—3,99	56
7	4,00—4,19	46
8	4,20—4,39	30
9	4,40—4,59	36
10	4,60—4,79	19
11	4,80—4,99	14
12	5,00—5,19	10
13	5,20—5,39	9
14	5,40—5,59	6
15	5,60 < M	5
Total		377

Va trebui să căutăm legea de repartiție asimptotică căreia i se supune acest fenomen. Cum în lucrarea [4] autorii propun, pentru determinarea numărului N de cutremure de magnitudine M într-o unitate de timp de un an, relația

$$\log N = 3,45 - 0,70 M$$

iar pe de altă parte am văzut că avem o curbă a frecvențelor asimetrică, vom testa ipoteza că datele de observație provin dintr-o lege lognormală.

Testarea lognormalității repartiției magnitudinilor cutremurelor de pământ o facem ca de obicei cu ajutorul criteriului χ^2 .

Estimăm mai întâi parametrii repartiției $\log \gamma$ și σ cu ajutorul relațiilor:

$$\log \sigma = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \log x_i}{\sum_{i=1}^n n_i}$$

și

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\log x_i - \log \gamma)^2}{\sum_{i=1}^k n_i - 1}$$

calculele fiind conduse după tabelul 2.

Odată estimați acești parametrii trecem la verificarea normalității repartiției variabilei aleatoare $\log X$, X fiind variabila aleatoare megitudine.

Calculele efectuate conform cu tabelul 3 ne-au condus la un χ^2 calculat = 21,7183 ce corespunde la 12 grade de libertate.

Din tabele găsim că χ^2 ce corespunde la 12 grade de libertate și pragul de semnificație $q = 0,025$ este

$$\chi_{0,025}^2(12) = 23,3 > 21,7183 = \chi^2 \text{ calculat}$$

și prin urmare se poate considera că repartiția magnitudinilor urmează o lege de repartiție lognormală.

Cunoscînd acest lucru putem acum determina probabilitatea de a înregistra un cutremur de pămînt produs de centrul Vrancea, cu mărimea cuprinsă între M_1 și M_2 și anume:

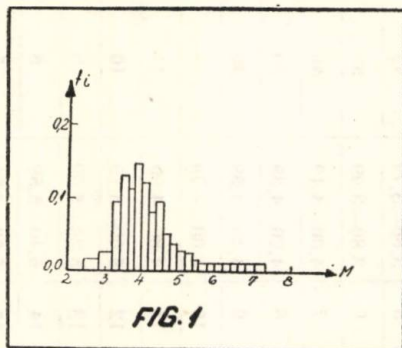
$$P(M_1 \leq M \leq M_2) = \frac{\log e}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,067} \int_{M_1}^{M_2} e^{-\frac{(\log x - 0,59987)^2}{2 \cdot 0,067}} \frac{1}{x} dx$$

relație ce mai poate fi pusă sub forma:

$$P(M_1 \leq M \leq M_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log M_1 - 0,59987}{0,067}}^{\frac{\log M_2 - 0,59987}{0,067}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \Phi\left(\frac{\log M_2 - 0,59987}{0,067}\right) - \Phi\left(\frac{\log M_1 - 0,59987}{0,067}\right).$$

Deci putem exprima probabilitatea de a avea cutremure cu mărimea între anumite limite date cu ajutorul funcției $\Phi(\cdot)$ a lui Laplace, lucru foarte comod în aplicații, dat fiind faptul că funcția Φ este tabelată.



TABELUL 2

Nr. crt.	Intervalul de magnitudine	Fregvențele n_i	$\log x_i$	$n_i \log x_i$	$\log x_i - \log \gamma$	$(\log x_i - \log \gamma)^2$	$n_i (\log x_i - \log \gamma)^2$	Observații
1	2,30—2,79	6	0,40654	2,43900	—0,19337	0,03739	0,22434	— Se ia ca valoare x_i mijlocul intervalului respectiv
2	2,80—3,19	10	0,47712	4,77120	—0,12275	0,01507	0,15070	
3	3,20—3,39	36	0,51851	18,66636	—0,08136	0,00662	0,23832	
4	3,40—3,59	51	0,54407	27,74757	—0,05580	0,00311	0,15861	
5	3,60—3,79	43	0,56820	24,43260	—0,03167	0,00100	0,04300	
6	3,80—3,99	56	0,59106	33,09936	—0,00881	0,00008	0,00448	
7	4,00—4,19	46	0,61278	28,18788	0,01291	0,00017	0,00782	
8	4,20—4,39	30	0,63347	19,00410	0,03360	0,00113	0,03390	
9	4,40—4,59	36	0,65321	23,51556	0,05334	0,00284	0,10224	
10	4,60—4,79	19	0,67210	12,76990	0,07223	0,00522	0,09918	
11	4,80—4,99	14	0,69020	9,66280	0,09033	0,00816	0,11424	
12	5,00—5,19	10	0,70757	7,07570	0,10770	0,01160	0,11600	
13	5,20—5,39	9	0,72428	6,51852	0,12441	0,01548	0,13932	
14	5,40—5,59	6	0,74036	4,44216	0,14049	0,01974	0,11844	
15	5,60—7,50	5	0,76343	3,81715	0,16356	0,02675	0,13375	
		377						

$$\log \gamma = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \log x_i}{\sum n_i} = \frac{226,14986}{377} = 0,59987$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (\log x_i - \log \gamma)^2}{\sum_{i=1}^n n_i - 1} = \frac{1,66434}{376} = 0,004426436$$

$$\sigma = 0,067$$

TABELUL 3

Nr. crt.	Intervalul de magnitudine	n_i	$\log n_i$	$\log x_i - \log \gamma$	$z_i = \frac{\log x_i - \log \gamma}{\sigma}$	$\Phi(z_i)$	$p_i = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})$	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{n p_i}$	Observații
1	2,30—2,79	6	0,44560	—0,15427	—2,30	—0,48928	0,01072	4,04	1,96	3,8416	0,9509	S-a luat log 2,79 deoarece în registrul sînt spre limita superioară a intervalului
2	2,80—3,19	10	0,47712	—0,12275	—1,83	—0,46638	0,02290	8,63	1,37	1,8769	0,2175	
3	3,20—3,39	36	0,51851	—0,08136	—1,21	—0,38686	0,07952	29,98	6,02	36,2404	8,6255	
4	3,40—3,59	51	0,54407	—0,05580	—0,83	—0,29673	0,09013	33,98	17,12	293,0944	0,0112	
5	3,60—3,79	43	0,56820	—0,03167	—0,47	—0,18082	0,11591	43,70	— 0,70	0,4900	1,1040	
6	3,80—3,99	56	0,59106	—0,00881	—0,13	—0,05172	0,12910	48,67	7,33	53,7289	0,0761	
7	4,00—4,19	46	0,61278	0,01291	0,19	0,07535	0,12707	47,91	— 1,91	3,6481	4,3320	
8	4,20—4,39	30	0,63347	0,03360	0,50	0,19146	0,11611	43,77	—13,77	189,6129	0,0056	
9	4,40—4,59	36	0,65321	0,05334	0,80	0,28814	0,09668	36,45	— 0,45	0,2025	0,0056	
10	4,60—4,79	19	0,67210	0,07223	1,08	0,35993	0,07179	27,06	— 8,06	64,9626	2,4007	
11	4,80—4,99	14	0,69020	0,09033	1,35	0,41149	0,05156	19,44	— 5,44	28,5936	1,5223	
12	5,00—5,19	10	0,70757	0,10770	1,61	0,44630	0,03481	13,12	— 3,12	9,7344	0,7420	
13	5,20—5,39	9	0,72428	0,12441	1,86	0,46856	0,02226	8,39	0,61	0,3721	0,0444	
14	5,40—5,59	6	0,74036	0,14049	2,10	0,48214	0,01358	5,12	0,88	0,7744	0,1513	
15	5,60—7,50	5	0,81291	0,21304	3,18	0,49926	0,01712	6,45	— 1,45	2,1025	0,3260	
		377									21,7183	



Să vedem acum cum putem să determinăm numărul probabil de cutremure de o anumită magnitudine produse de un focar într-o unitate de timp, de exemplu un an.

Dacă într-o perioadă de timp de „ m ” ani s-au înregistrat „ n ” cutremure atunci numărul de cutremure dintr-un an, de magnitudine cuprinsă între limitele M_1 și M_2 îl vom exprima prin relația

$$N = \frac{n}{m} P(M_1 \leq M \leq M_2)$$

sau altfel scris:

$$N = \frac{n}{m} \left[\Phi \left(\frac{\log M_2 - 0,59987}{0,067} \right) - \Phi \left(\frac{\log M_1 - 0,59987}{0,067} \right) \right]$$

În cazul nostru

$$n = 377; m = 26$$

Deci:

$$N = 14,7 \left[\Phi \left(\frac{\log M_2 - 0,59987}{0,067} \right) - \Phi \left(\frac{\log M_1 - 0,59987}{0,067} \right) \right]$$

Se observă că numărul N de cutremure depinde de lungimea intervalului de magnitudine. Formula dată în această lucrare are deci o serie de avantaje față de cea dată în lucrarea [4].

(a) determină numărul N de cutremure de o anumită magnitudine dintr-un an, pentru întreaga gamă de magnitudini, în timp de formula dată în lucrarea [4] determină numărul N numai pentru porțiunea de curbă ce poate fi aproximată liniar. În afara intervalelor de magnitudine [4,00—6,0] formula amintită nu mai este valabilă.

(b) determină numărul N pentru orice împărțire în intervale (intervale de orice lungime) pe cînd formula dată în lucrarea [4] este valabilă numai pentru împărțirea folosită.

(c) metoda propusă dă posibilitatea, după cum am mai amintit, să se determine probabilitatea de a înregistra un cutremur produs de un focar cu magnitudinea cuprinsă între limite date.

(d) metoda propusă este valabilă pentru orice focar de cutremur, cu schimbarea anumitor constante ce caracterizează focarul respectiv.

Pentru comparație cu datele lucrării [4] dăm un tabel unitar rezultatelor aplicării formulei propuse de noi.

M	2,3—3	3—3,5	3,5—4	4—4,5	4,5—5
$P(M_{i-1} \leq M \leq M_i)$	0,03343	0,16965	0,30870	0,27327	0,14532
	3,343%	16,965%	30,979%	27,327%	14,532%
N	0,4847	2,4599	4,4761	3,9624	2,1070
log N	1,68547	0,39094	0,65089	0,59770	0,32366
	-0,31453				

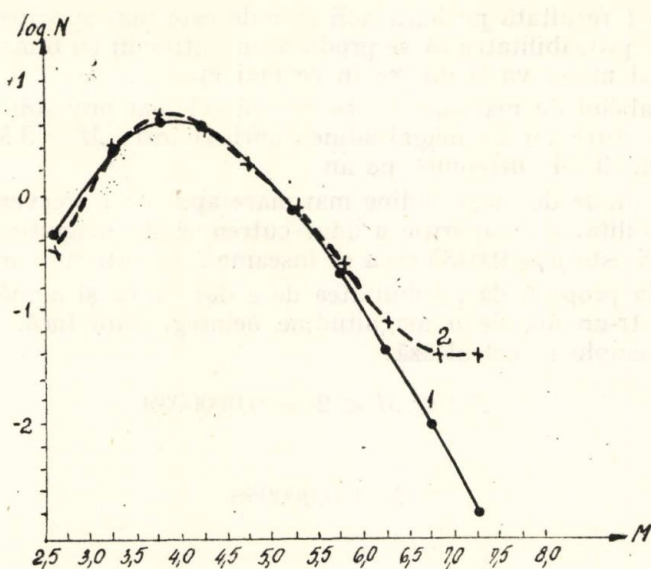


FIG. 2

- 1 —●— Conform metodicii propuse
2 —×— Conform lucrării [3]

Pe baza datelor acestui tabel s-a construit graficul din fig. 2 unde în abscisă s-au trecut magnitudinile, iar pe ordonată $\log N$.

Pînă la magnitudinea $M = 6$ se observă o foarte bună concordanță între curba calculată pe baza noii metode și curba pe care ar fi așezate punctele determinate în lucrarea [4].

Neconcordanța observată pentru magnitudini $M > 6$ se datorează desigur caracterului empiric al determinărilor din lucrarea [4] rezultă din lipsa de înregistrări suficiente a unor cutremure de magnitudini mai mari.

5—5,5	5,5—6	6—6,5	6,5—7	7—7,5	7,5—8
0,05113	0,01440	0,00317	0,00061	0,00011	0,00001
5,113%	1,44%	0,317%	0,061%	0,011%	0,001%
0,7414	0,2088	0,0459	0,008845	0,001595	0,000145
1,87005	1,31973	2,66181	3,94670	3,20276	4,16137
0,12995	-0,68027	-1,33913	-2,05330	-2,79724	-3,83863

Curba 1 rezultată pe baza noii metode este mai aproape de realitate. Într-adevăr, probabilitatea să se producă un cutremur cu o magnitudine din ce în ce mai mare, va fi din ce în ce mai mică.

Din tabelul de mai sus se observă că cel mai probabil este ca să se producă un cutremur de magnitudine cuprinsă între $M = 3,5$ și $M = 4$ și anume în medie 4 cutremure pe an.

Cutremurele de magnitudine mai mare apar cu o frecvență mai mică. Probabilitatea de apariție a unui cutremur de magnitudine cuprinsă între 6,—6,5 este $p = 0,0459$ ceea ce înseamnă un cutremur la cca. 22 ani.

Metoda propusă dă posibilitatea de a determina și numărul N de cutremure dintr-un an, de o magnitudine neînregistrată încă.

De exemplu se calculează:

$$P(1 \leq M \leq 2) = 0,0000039$$

și

$$N = 0,000056$$

sau

$$P(7,5 < M < 8) = 0,00001$$

$$N = 0,000145$$

adică o probabilitate foarte mică ca să înregistrăm cutremure produse de focarul din Centrul Vrancea, de magnitudine cuprinsă în intervalul [1—2] sau [7,6—8]

Se observă că

$$P(1 \leq M \leq 7) = \Phi\left(\frac{\log 7 - 0,59987}{0,067}\right) - \Phi\left(\frac{\log 1 - 0,59987}{0,067}\right).$$

Adică majoritatea cutremurelor ce se vor produce în Vrancea vor avea magnitudini cuprinse în intervalul [1—7] iar în afara acestui interval se vor produce cu o probabilitate foarte mică egală cu $p = 1 - 0,99986 = 0,00014$.

Deci cu atât mai mult cutremure de magnitudini $M > 7$ se vor produce cu o probabilitate foarte mică.

BIBLIOGRAFIE

1. Allais M., Methode d'évolution des perspectives économique, de la recherche minière sur de grands espaces. Revue de l'industrie minière, Janvier, 329—382 (1956)
2. Cramér H., Mathematical methods of statistics, Princenton University Press, 1946.
3. Creangă A., Lari I., R. Theodorescu, Asupra aplicării metodelor statistice la prospectarea minereurilor și substanțelor utile. Studii și cercetări matematice, T. 2. anul XIII, 269—294 (1962)

4. Enescu D., Jianu D., Determinarea magnitudinii cutremurelor adinci din Vrancea la stațiile seismografice românești
5. Hald A., Statistical theory with engineering applications, New-York — London, 1952.
6. O. Onicescu, G. Mihoc, Lecții de statistică matematică, Ed. Tehnică 1958, București.

Primită la redacție la 1.II.1970

Centrul de statistică matematică al Academiei R. S. România, București
ICEMIN, București

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ МАГНИТУДЫ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ В РАЙОНЕ ВРАНЧЯ

Краткое содержание

В статье даны результаты исследования распределения магнитуды землетрясений в районе Вранчя.

Полученный результат, проверенный с помощью критерия χ^2 , доказывает что распределение магнитуды землетрясений логарифмически нормальное.

Также изучается повторяемость землетрясений этого района и другие характеристики сейсмических явлений.

A STATISTICAL METHOD FOR THE INTERPRETATION OF THE EARTHQUAKES MAGNITUDES IN THE ZONE VRANCEA

Abstract

This paper deals with the lognormality hypothesis of the earthquakes magnitudes in the Romanian zone Vrancea. The χ^2 test is utilized. Consequently, some seismic indexes are given.

ASUPRA INEGALITĂȚILOR LUI CEBÎȘEV ȘI KOLMOGOROV

STOIAN ZAHARIA

Pornind de la binecunoscutele inegalități a lui Cebîșev și Kolmogorov:

$$P(|f| < a) \geq 1 - \frac{\overline{M}_r(f)}{a^r} \text{ și } P(|f| \geq a) \geq \frac{M_2(f) - a^2}{M^2}$$

am arătat că intervalul unde $P(|f| < a)$ ia valori poate fi micșorat și că aceasta este cea mai bună micșorare dată în aceleași condiții.

Teoremă Fie $\{E, \mathfrak{K}, P\}$, $\mathfrak{V}(E, \mathfrak{K})$, $f \in \mathfrak{V}(E, \mathfrak{K})$

$$m = \inf_{x \in E} |f(x)|, \quad a > m, \quad r > 0.$$

În aceste ipoteze și notații avem:

$$P(|f| < a) \geq 1 - \frac{\overline{M}_r(f) - m^r}{a^r - m^r}.$$

și respectiv

$$P(|f| \geq a) < \frac{\overline{M}_r(f) - m^r}{a^r - m^r}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \overline{M}_r(f) &= \int_E |f|^r dP = \int_{(|f| < a)} |f|^r dP + \int_{(|f| \geq a)} |f|^r dP \geq \int_{(|f| < a)} m^r dP + \int_{(|f| \geq a)} a^r dP = \\ &= m^r P(|f| < a) + a^r P(|f| \geq a) = m^r P(|f| < a) + a^r [1 - \\ &\quad - P(|f| < a)] = a^r + P(|f| < a) \cdot (m^r - a^r) \end{aligned}$$

de unde

$$P(|f| < a) \geq \frac{a^r - \overline{M}_r(f)}{a^r - m^r}$$

sau

$$P(|f| < a) \geq 1 - \frac{\overline{M}_r(f) - m^r}{a^r - m^r}$$

și

$$P(|f| \geq a) < \frac{\bar{M}_r(f) - m^r}{a^r - m^r}.$$

Observația 1: $0 < a < m$ implică $P(|f|a) = 0$.

Observația 2:

$$\frac{\bar{M}_r(f) - m^r}{a^r - m^r} < \frac{M_r(f)}{a^r}$$

deci este o micșorare a intervalului.

Teoremă: Fie $\{E, \mathfrak{K}, P\}$, $\mathfrak{Y}(E, \mathfrak{K})$ $f \in \mathfrak{Y}(E, \mathfrak{K})$

$$M = \sup_{x \in E} |f|(x) \quad 0 < a < M, \quad r > 0.$$

În aceste ipoteze și notații avem:

$$P(|f| < a) \geq \frac{\bar{M}_r(f) - a^r}{\bar{M}^r - a^r}$$

și respectiv

$$P(|f| \geq a) \geq \frac{M^r(f) - a^2}{M^2 - a^2}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \bar{M}_r(f) &= \int_E |f|^r dP = \int_{(|f| < a)} |f|^r dP + \int_{(|f| \geq a)} |f|^r dP \leq \int_{(|f| < a)} a^r dP + \int_{(|f| \geq a)} M^r dP = \\ &= a^r P(|f| < a) + M^r P(|f| \geq a) = a^r [1 - P(|f| \geq a)] + \\ &+ M^r \cdot P(|f| \geq a) = a^r + (M^r - a^r) P(|f| \geq a) \end{aligned}$$

deci

$$P(|f| \geq a) \geq \frac{\bar{M}_r(f) - a^r}{M^r - a^r}.$$

și respectiv

$$P(|f| \geq a) \geq \frac{\bar{M}_2(f) - a^2}{M^2 - a^2}$$

Observația 1: $a > M$ implică $P(|f| \geq a) = 0$.

Observația 2:

$$\frac{M_2(f) - a^2}{M^2 - a^2} > \frac{M_2(f) - a^2}{M^2}$$

deci este o micșorare a intervalului.

Observația 3: Fie $f(\omega) = k > 0$, orice $\omega \in E$, atunci

$$M = k, \bar{M}_r(f) = k^r \text{ și } a < k$$

$$P(|f| \geq a) = 1 \text{ și } \frac{\bar{M}_r(f) - a^r}{M^r - a^r} = \frac{k^r - a^r}{k^r - a^r} = 1,$$

adică

$$P(|f| \geq a) = \frac{\bar{M}_r(f) - a^r}{M^r - a^r},$$

deci este cea mai bună evaluare folosind inegalitățile.

Consecința. În condițiile și notațiile celor două teoreme și considerînd $m < a \leq b < M$ avem:

$$P(a \leq |f| \leq b) = \frac{M^r(M^r m^r - a^r b^r) + M^r \bar{M}_r(f)(a^r + b^r - M^r - m^r)}{b^r(M^r - a^r)(b^r - m^r)}.$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \bar{M}_r(f) &= \int_E |f|^r dP = \int_{(m \leq |f| < a)} |f|^r dP + \int_{(a \leq |f| \leq b)} |f|^r dP + \int_{(|f| > b)} |f|^r dP \leq \\ &\leq a^r P(m \leq |f| < a) + b^r P(a \leq |f| \leq b) + M^r P(|f| > b). \end{aligned}$$

Ținînd seamă de cele două teoreme rezultă inegalitatea.

BIBLIOGRAFIE

- Loève M. Probability theory, ed 2-a New York, 1960.
 Neveu I. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et Cie. Paris 1964.
 Onicescu O, Mihoc Ghe. C. T. Ionescu Tulcea, Calculul probabilităților și aplicații. Edit. Acad. R.P.R. 1956.

Primită la redacție la 1 III. 1970.

Institutul politehnic București

О НЕРАВЕНСТВАХ ЧЕБЫШЕВА И КОЛМОГорова

Краткое содержание

В этой работе показывается что в неравенстве Чебышева и Колмогорова промежутки, где принимает значения $P(|f| < a)$ принимает значения может быть уменьшен и что это уменьшение есть самое наилучшее, при условиях соответствующих теорем.

Находится также одно увеличение $P(a \leq |f| \leq b)$.

ON CEBYSEV — KOLMOGOROV INEQUALITIES

Abstract

It is shown that in Cebysev — Kolmogorov inequalities the range where $P(|f| < a)$ has values can be shrunk and that this shrinkage is the best under the conditions of the corresponding theorems.

An increase for $P(a \leq |f| \leq b)$ is also found.

ASUPRA PROPRIETĂȚILOR DE CONGRUENȚĂ ALE POLINOAMELOR ORTOGONALE

IOAN ȘICLOVAN și DOINA TEODORU

1. Pentru polinoamele ortogonale clasice utilizăm notațiile obișnuite: $P_n(x)$ — polinomul lui Legendre de gradul n ; $H_n(x)$ — polinomul lui Hermite de gradul n ; $L_n(x)$ polinomul generalizat al lui Leguerre de gradul n ; $T_n(X)$ $U_n(x)$ — polinoamele lui Cebîșev de gradul n și de speța întâi respectiv a doua.

Amintim câteva proprietăți de congruență binecunoscute ale polinoamelor ortogonale clasice.

Congruența lui Schur [1] este

$$(1.1) \quad P_n(x) \equiv P_{a_0} P_{a_1}^{p^1} P_{a_2}^{p^2} \dots P_{a_n}^{p^n} \pmod{p}$$

unde p este un număr prim impar iar

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n, \quad 0 \leq a_i < p$$

Congruența lui Wahab [1] este

$$(1.2) \quad P_{kp}(x) \equiv P_k^p(x) \pmod{p},$$

p fiind un număr prim impar.

Congruențele lui Carlitz [2] pentru polinoamele Hermite și Laguerre sînt:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} H_{n+m}(x) &\equiv (2x)^m H_n(x) \pmod{m} \\ \Lambda_{n+m}^{(\lambda)}(x) &\equiv (-x)^m \Lambda_n^{(\lambda)}(x) \pmod{m}, \\ \Lambda_n^{(\lambda)}(x) &= n! L_n^{(\lambda)}(x). \end{aligned}$$

m fiind un număr natural oarecare.

Congruențele lui Carlitz [2] sînt

$$(1.4) \quad 2^p P_p(x) \equiv \{(x-1)^p + (x+1)^p\} \pmod{p^2}$$

$$(1.5) \quad 2^{2p} [P_{2p}(x) - P_p^2(x)] \equiv 2(x^2 - 1)^p \pmod{p^2}$$

unde p este un număr prim impar.

Congruența lui Chatterjea [3] este:

$$(1.6) \quad P_{kp}(x) \equiv P_p(x) + \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} c_i [P_{2p}(x) - P_p^2(x)]^i P_p^{k-2i}(x) \pmod{p^2}$$

unde $k = 3, 4, \dots, p$ este un număr prim impar c constante cunoscute (date în [3] iar $[a]$ este partea întreagă a lui a).

În nota de față se arată că polinoamele Cebîșev au proprietăți de congruență de tip Wahab și se deduc proprietăți de congruență, pentru polinoamele ortogonale clasice prin utilizarea formulei Cristoffel-Darboux.

2. Polinoame Cebîșev. Polinomul Cebîșev de speța întâi și de gradul n are ([4] [5]) reprezentarea

$$(2.1) \quad T_n(x) = \cos n\theta, \quad x = \cos \theta$$

sau

$$(2.2) \quad T_n(x) = \sum_{2s \leq n} (-1)^s \binom{n}{2s} x^{n-2s} (1-x^2)^s$$

Polinomul lui Cebîșev de speța a doua și de gradul n are ([4], [5]) reprezentările:

$$(2.3) \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta$$

$$(2.4) \quad U_n(x) = \sum_{2s+1 \leq n+1} (-1)^s \binom{n+1}{2s+1} x^{n-2s} (1-x^2)^s$$

iar

$$(2.5) \quad U_{2k}(x) = (U_k - U_{k-1})(U_k + U_{k-1}), \quad U_{2k-1} = 2U_{k-1} T_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Teorema 2.1. Dacă p este un număr prim impar atunci

$$(2.6) \quad T_{kp}(x) \equiv T_k^p(x) \pmod{p}$$

Demonstrație. Formula (2.2) se scrie:

$$(2.7) \quad T_{kp}(x) = \sum_{j \leq kp} (-1)^{\frac{j}{2}} \binom{kp}{j} x^{kp-j} (1-x^2)^{\frac{j}{2}}, \quad j = 2s \leq kp$$

Utilizînd [3] congruențele:

$$(2.8) \quad \binom{kp}{j} \equiv 0 \pmod{p} \text{ dacă } j \neq ip \text{ și } \binom{kp}{ip} \equiv \binom{k}{i} \pmod{p}$$

egalitatea (2.7) duce la

$$(2.9) \quad T_{kp}(x) \equiv \sum_{2i \leq k} (-1)^i \binom{k}{2i} x^{p(k-2i)} (1-x^2)^p = T_k(x^p) \pmod{p}$$

Cum

$$(2.10) \quad T_k(x^p) \equiv [T_k(x)]^p = T_k^p(x) \pmod{p}$$

din (2.9) și (2.10) rezultă (2.6).

Polinoamele lui Cebîșev de speța a doua verifică și ele o proprietate de tip Wahab, cu unele modificări, cum rezultă din

Teorema 2.2. Dacă p este un număr prim impar atunci

$$(2.11) \quad U_{kp}(x) \equiv x(x^2 - 1)^{\frac{p-1}{2}} U_{k-1}^p(x) + T_k^p(x) \pmod{p}$$

Demonstrație. Cu egalitatea:

$$\binom{2s+1}{n} = \binom{2s}{n} + \binom{2s}{n-1}$$

formula (2.4) se poate pune sub forma:

$$(2.12) \quad U_n(x) = A_n(x) + T_n(x)$$

unde

$$(2.13) \quad A_n(x) = \sum_{2s+1 \leq n} (-1)^s \binom{n}{2s+1} x^{n-2s} (1-x^2)^s$$

iar $T_n(x)$ polinomul lui Cebîșev de speța întâi dat de (2.2).

Punînd $n = kp$, $2s+1 = j$, egalitatea (2.13) ia forma

$$A_{kp}(x) = \sum_{j \leq n} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \binom{kp}{j} x^{kp-j+1} (1-x^2)^{\frac{j-1}{2}}$$

care cu congruențele (2.8) se transformă în

$$\begin{aligned} A_{kp}(x) &\equiv \sum_{2i+1 \leq k} (-1)^{i + \frac{p-i}{2}} \binom{k}{2i+1} x^{p(k-1-2i)+1} (1-x^2)^{ip + \frac{p-1}{2}} \equiv \\ &\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} x(1-x^2)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{2i+1 \leq k} (-1)^i \binom{k}{2i+1} (x^p)^{k-1-2i} [(1-x^2)^p]^i \pmod{p} \end{aligned}$$

de unde cu (2.4)

$$A_{kp}(x) \equiv x(x^2 - 1)^{\frac{p-1}{2}} U_{k-1}^p(x) \pmod{p}$$

Ținînd seama de faptul că $U_{k-1}(x^p) \equiv U_{k-1}^p(x) \pmod{p}$ se obține:

$$(2.14) \quad A_{kp}(x) \equiv x(x^2 - 1)^{\frac{p-1}{2}} U_{k-1}^p(x) \pmod{p}$$

Egalitatea (2.12) și congruențele (2.14) și (2.6) conduc imediat la (2.11)

Consecința. Dacă p este un număr prim impar atunci

$$(2.15) \quad T_{kp+1}(x) + T_{kp-1}(x) \equiv 2x T_k^p(x) \pmod{p}$$

și

$$(2.16) \quad U_{kp+1}(x) + U_{kp-1}(x) \equiv 2x[T_k^p(x) + x(x^2 - 1)^{\frac{p-1}{2}} U_{k-1}^p(x)] \pmod{p}$$

Congruențele (2.15) și (2.16) rezultă din (2.6), (2.11), și relația de recurență

$$C_{n+1}(x) = 2x C_n(x) - C_{n-1}(x),$$

unde $C(x)$ reprezintă polinomul $T_n(x)$ sau $U_n(x)$

Teorema 2.3. Dacă p este un număr prim impar atunci

$$(2.17) \quad U^{2p-1}(x) \equiv 2[x^p U_{p-1}(x) + (x^2 - 1)^{\frac{p-1}{2}} (T_p(x) - x^p)] \pmod{p^2}$$

$$(2.18) \quad T_{2p}(x) \equiv 4x^p T_p(x) - 2x^{2p} - 1 \pmod{p^2}$$

$$(2.19) \quad U_{2p}(x) = -(2p+1)x^{2p} - (x^2-1)^p - 2(p+1)x^{p+1}(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} + 2[(p+1)x^p + x(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}]U_p(x) - 2(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}U^{p-1}(x) \pmod{p^2}$$

Demonstrație. În membrul drept al celei de a doua egalități (2.5) se exprimă U_{k-1} și T_k cu ajutorul formulelor (2.4) și (2.2)

Înmulțind cele două expresii și ținând seama de faptul că termenii care conțin p^2 ca factor sînt congruenți cu zero $\pmod{p^2}$, se obține (2.17).

Pentru a obține (2.18) se procedează analog pornind de la [5,10.11] egalitatea

$$T_{2p}(x) = 2T_p^2(x) - 1$$

La congruența (2.19) se ajunge la fel considerînd prima egalitate (2.5) sub forma

$$U_{2p} = U_p^2 - U_{p-1}^2$$

unde U_p și U_{p-1} se exprimă cu ajutorul formulei (2.4)

3. Polinoame Hermite. Polinomul Hermite de gradul n admite [4] [5], reprezentările:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{2s \leq n} (-1)^s \frac{n!}{s!(n-2s)!} (2x)^{n-2s} = \\ &= \sum_{2s \leq n} (-1)^s \binom{n-s}{s} (n-s+1)_s (2x)^{n-2s} \end{aligned}$$

unde

$$(a)_s = a(a+1)(a+2)\dots(a+s-1)$$

Polinoamele Hermite verifică [2], oricare ar fi numărul natural m , relația

$$(3.2) \quad H_m(x) \equiv (2x)^m \pmod{m}$$

Teorema 3.1. Polinoamele lui Hermite verifică relațiile de congruență

$$(3.3) \quad \sum_{s=0}^m 2^{m-s+1} (s+1)_{m-s} H_s(x) H_s(y) \equiv 2(4xy)^m \pmod{m}$$

$$(3.4) \quad \sum_{s=0}^m 2^{m-s+1} (s+1)_{m-s} H_s^2(x) \equiv 2(2x)^{2m} \pmod{m}$$

Demonstrație. În formula Cristoffel-Darboux [5, 10, 13] pentru polinoamele Hermite

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (x-y) \sum_{s=0}^m 2^{m-s+1} (s+1)_{m-s} H_s(x) H_s(y) = \\ = H_{m+1}(x) H_m(y) - H_m(x) H_{m+1}(y). \end{aligned}$$

se ține seama de (3.2) și (1.3),

$$H_{m+1}(x) \equiv (2x)^m H_1(x), \quad H_m(y) \equiv (2y)^m \pmod{m}$$

$H_1(x) = 2x$, și rezultă (3.3)

Împărțind ambii membri din (3.5) prin $(x-y)$ și trecînd la limită cînd $y \rightarrow x$ cu regula lui L'Hospital, se găsește

$$(3.6) \quad \sum_{s=0}^m 2^{m-s+1} (s+1)_{m-s} H_s^2(x) = H'_{m+1}(x) H_m(x) - H'_m(x) H_{m+1}(x)$$

Deoarece ([4], [5])

$$H'_m(x) = 2mH_{m-1}(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

și

$$H'_{m+1}(x) = 2(m+1)H_m(x) \equiv 2H_m(x) \pmod{m}$$

din (3.6) și (3.2) rezultă (3.4).

4. Polinoame Laguerre. Polinomul generalizat Laguerre de gradul n admite [4] reprezentarea

$$(4.1) \quad L_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{s=0}^n \binom{n+\lambda}{n-s} \frac{(-x)^s}{s!}$$

Presupunînd λ întreg

$$(4.2) \quad \Lambda_n^{(\lambda)}(x) = n! L_n^{(\lambda)}(x)$$

este un polinom în λ și x cu coeficienți întregi. Din (4.1) și (4.2) rezultă

$$(4.3) \quad \Lambda_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{s=0}^n \binom{n+\lambda}{s} (n-s+1)_s (-x)^{n-s} = \\ = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (\lambda+s+1)_{n-s} (-x)^{n-s}$$

Există congruența [2]

$$(4.4) \quad \Lambda_m^{(\lambda)}(x) \equiv (-x)^m \pmod{m}$$

care rezultă imediat din a doua egalitate (4.3)

Teorema 4.1. Polinoamele (4.2) verifică relația

$$(4.5) \quad \sum_{s=0}^m (s+\lambda+1)_{m-s} (s+1)_{m-s} \Lambda_s^{(\lambda)}(x) \Lambda_s^{(\lambda)}(y) \equiv (xy)^m \pmod{m}$$

oricare ar fi numărul natural m .

Demonstrație. În formula Cristoffel-Darboux [5, 10, 12] pentru polinoamele Laguerre se înlocuiește $L_n^{(\lambda)}(x)$ prin $\frac{1}{n!} \Lambda_n^{(\lambda)}(x)$ și se obține:

$$(4.6) \quad (x-y) \sum_{s=0}^m (s+\lambda+1)_{m-s} (s+1)_{m-s} \Lambda_s^{(\lambda)}(x) \Lambda_s^{(\lambda)}(y) = \\ = \Lambda_m^{(\lambda)}(x) \Lambda_{m+1}^{(\lambda)}(y) - \Lambda_{m+1}^{(\lambda)}(x) \Lambda_m^{(\lambda)}(y)$$

Utilizând congruențele (4.4) și (1.3)

$$\Lambda_m^{(\lambda)}(x) \equiv (-x)^m \pmod{m}, \quad \Lambda_{m+1}^{(\lambda)}(y) \equiv (-y)^m \Lambda_1^{(\lambda)}(y) \pmod{m},$$

$$\Lambda_{m+1}^{(\lambda)}(x) \equiv (-x)^m \Lambda_1^{(\lambda)}(x) \pmod{m}, \quad \Lambda_m^{(\lambda)}(y) \equiv (-y)^m \pmod{m},$$

$$\Lambda_1^{(\lambda)}(x) = \lambda + 1 - x \text{ din (4.6) rezultă (4.5).}$$

Consecința. Există congruența

$$(4.7) \quad \sum_{s=0}^m (s+\lambda+1)_{m-s} (s+1)_{m-s} [\Lambda_s^{(\lambda)}(x)]^2 \equiv x^{2m} \pmod{m}$$

Teorema 4.2. Dacă p este un număr prim, atunci

$$(4.8) \quad \sum_{s=0}^{kp} (s+hp+1)_{kp-s} (s+1)_{kp-s} \Lambda_s^{(hp)}(x) \Lambda_s^{(hp)}(y) \equiv \\ \equiv (xy)^{kp} [1 - h(h+k) p((-x)^{-p} + (-y)^{-p})] \pmod{p^2}, \quad k, h \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Înlocuim în (4.6) $m = kp$, $\lambda = hp$ și folosim [2] congruența

$$(4.9) \quad \Lambda_{kp}^{(hp)}(x) \equiv (-x)^{kp} - k(h+k) p(-x)^{(k-1)p} \pmod{p^2}$$

Din formula de recurență [5, 10. 12]

$$\Lambda_{kp+1}^{(hp)}(x) = (-x + 2kp + hp + 1) \Lambda_{kp}^{(hp)}(x) - (2kp + hp) kp \Lambda_{kp-1}^{(hp)}(x)$$

se deduce

$$(4.10) \quad \Lambda_{kp+1}^{(hp)}(x) \equiv (-x + 2kp + hp + 1) [(-x)^{kp} - \\ - k(h + k)p(-x)^{(k-1)p}] \pmod{p^2}$$

Din (4.9) (4.10), și (4.6) rezultă (4.8).

Consecința. Dacă p este un număr prim atunci

$$\sum_{s=0}^{kp} (s + hp + 1)_{kp-s} (s + 1)_{kp-s} [\Lambda_s^{(hp)}(x)]^2 \equiv x^{2kp} [1 - \\ - 2hp(k + h) (-x)^{-p}], \pmod{p^2}.$$

5. Polinoame Legendre. Pentru polinomul lui Legendre de gradul n amintim ([2], [3], [5]) reprezentările

$$(5.1) \quad P_n(x) = 2^{-n} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^s \binom{n}{s} \binom{2n-2s}{n} x^{n-2s} = 2^{-n} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s}^2 (x-1)^s (x+1)^{n-s}$$

Teorema 5.1. Dacă p este un număr prim impar atunci

$$(5.2) \quad \sum_{s=0}^{kp} (2s + 1) P_s(x) P_s(y) \equiv [P_k(x) P_k(y)]^p \pmod{p}$$

Demonstrație. În formula Cristoffel-Darboux [5, 10. 10] pentru polinoamele Legendre.

$$(5.2) \quad (x - y) \sum_{s=0}^n (2s + 1) P_s(x) P_s(y) = (n + 1) [P_{n+1}(x) P_n(y) - \\ - P_n(x) P_{n+1}(y)]$$

se pune $n = kp$, $k \in \mathbb{N}$ și se obține

$$(5.4) \quad (x - y) \sum_{s=0}^{kp} (2s + 1) P_s(x) P_s(y) \equiv P_{kp+1}(x) P_{kp}(y) - \\ - P_{kp}(x) P_{kp+1}(y) \pmod{p}$$

Din formula de recurență [5, 10. 10] a polinoamelor Legendre

$$(kp + 1) P_{kp+1}(x) = (2kp + 1) x P_{kp}(x) - kp P_{kp-1}(x)$$

rezultă că

$$P_{kp+1}(x) \equiv x P_{kp}(x) \pmod{p}$$

iar cu aceasta, (5.4), se scrie

$$\sum_{s=0}^{kp} (2s+1) P_s(x) P_s(y) \equiv P_{kp}(x) P_{kp}(y) \pmod{p}$$

care cu ajutorul congruenței (1.2) se transformă în (5.2)

Consecința. Există congruența

$$\sum_{s=0}^{kp} (2s+1) P_s^2(x) \equiv P_k^{2p}(x) \pmod{p}$$

Teorema 5.2. Dacă p este un număr prim impar, atunci

$$(5.5) \quad \sum_{s=0}^{p-1} (2s+1) P_s(x) P_s(y) \equiv p 2^{-p+2} (1-2^{-p}) \sum_{s=0}^{p-1} x^{p-1-s} y^s \pmod{p^2}$$

Demonstrație. În formula (5.3) se înlocuiește n cu $p-1$ apoi se utilizează (1.4) și [2]

$$(5.6) \quad P_{p-1}(x) \equiv 2^{-p} [2^{p+1} + (x-1)^p - (x+1)^p] \pmod{p^2}$$

În urma unor calcule elementare se găsește

$$\begin{aligned} (x-y) \sum_{s=0}^{p-1} (2s+1) P_s(x) P_s(y) &\equiv 2^{-p+1} [2p x^p - 2p y^p] + \\ &+ 2^{-2p+1} p [x+1)^p (y-1)^p - (x-1)^p (y+1)^p] \equiv \\ &\equiv 2^{-p+2} p (1-2^{-p}) (x^p - y^p) \pmod{p^2} \end{aligned}$$

de unde (5.5)

Consecința. Dacă p este un număr prim impar

$$\sum_{s=0}^{p-1} (2s+1) P_s^2(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Rezultă din (5.5).

BIBLIOGRAFIE

1. J. W a h a b — New cases of irreducibility for Legendre polynomials. Duke Math. J. 19, 165—176 (1952)
2. L. C a r l i t z — Congruence properties of the polynomials of Hermite, Laguerre and Legendre, Math. Zeitschr. Bd. 59., 474—483 (1954)
3. S. K. C h a t t e r j e a — On congruence properties of Legendre polynomials Mathematics Magazine, Sept. Oct. 329—336, (1961)
4. G. S z e g ö — Orthogonal polynomials, Colloq. Pub. Amer. Math. Soc. 1948.
5. H. B a t e m a n, A. E r d e l y i. — Higher transcendental functions, vol 2, New-York Toronto London, Mc. Graw-Hill Book Company, inc 1953.

Primită la redacție la 10.XI. 1969.

Institutul de mine, Petroșani

О СВОЙСТВАХ КОНГРУЕНТНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Краткое содержание

В настоящей заметке устанавливаются некоторые свойства конгруентности типа Вахаб для многочленов Чебышева. Пользуясь конгруентностями Вахаба и Карлица выводятся, используя формулу Кристоффеля-Дарбу, свойства конгруентности классических ортогональных многочленов.

SUR LES PROPRIÉTÉS DE CONGRUENCE DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Résumé

Dans cette note on déduit des propriétés de congruence du type Wahab pour les polynômes de Tchebycheff. En utilisant les congruences de Wahab et de Carlitz on obtient des propriétés de congruence pour les polynômes orthogonaux classiques par l'utilisation de la formule de Cristoffel-Darboux.

CHRONICALLY ILL PATIENTS IN OPTIC NERVE DISEASE

BY DR. J. H. HARRIS

CHICAGO, ILL., U.S.A.

Optic nerve disease in chronically ill patients is a common occurrence. It is often the result of a systemic disease, such as syphilis, tuberculosis, or diabetes. The optic nerve is the part of the visual system that carries the visual information from the eye to the brain. It is a long, thin, and delicate structure that is susceptible to damage from various causes. In chronically ill patients, the optic nerve may be affected by a variety of factors, including infection, inflammation, and degeneration. The symptoms of optic nerve disease can vary widely, but they often include blurred vision, double vision, and loss of visual field. In some cases, the disease may be asymptomatic, but it can still cause damage to the optic nerve. Early diagnosis and treatment are essential to prevent permanent vision loss.

THE MECHANISMS OF OPTIC NERVE DISEASE

BY DR. J. H. HARRIS

The mechanisms of optic nerve disease are complex and involve a variety of factors. In some cases, the disease is caused by a direct infection of the optic nerve, such as syphilis or tuberculosis. In other cases, the disease is the result of a systemic disease that affects the optic nerve indirectly. For example, diabetes can cause damage to the optic nerve by affecting the blood supply. Inflammation of the optic nerve, known as optic neuritis, is another common cause of optic nerve disease. The exact mechanisms of optic nerve disease are still being studied, and more research is needed to understand the underlying causes and to develop effective treatments.

METODA GRADIENTULUI LA JOCURILE CONVEXE PE PATRATUL UNITATE

A. ȘTEFĂNESCU

În cadrul jocurilor antagoniste de două persoane cu sumă nulă, un loc aparte îl ocupă acelea pentru care alegerile celor doi parteneri se fac din intervale închise. Asemenea jocuri, numite continue (în sensul că mulțimea de definiție este un continuum) se exprimă matematic prin tripletul $\{K, S_1, S_2\}$.

S_1 , respectiv S_2 fiind spațiile alegerilor celor doi parteneri, iar $K: S_1 \times S_2$ nucleul jocului.

În cele ce urmează, vom atribui funcției K proprietăți de continuitate și concavitate — convexitate, iar S_1 și S_2 vor fi identificate cu intervalul închis $[0, 1]$.

§ 1. **Strategii optime.** În condițiile în care există $\max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} K(x, y)$

și $\min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} K(x, y)$, și sînt egale, s-a definit

soluția pură a jocului perechea (x_0, y_0) ($x_0 \in [0,1]$, $y_0 \in [0,1]$), pentru care K ia valoarea „ v ” (aceasta fiind valoarea comună a mărimilor sus menționate).

„ V ” reprezintă valoarea jocului iar x_0, y_0 strategiile optime pure pentru cei doi parteneri.

Considerînd mulțimea $\mathcal{F}_{[0,1]}$ a funcțiilor de repartiție definite pe $[0,1]$ s-a ajuns la o extindere a noțiunilor de strategie optimă și de soluție a jocului, definindu-se perechea de strategii optime mixte ca fiind reprezentată de repartițiile $F_0, G_0 \in \mathcal{F}_{[0,1]}$ pentru care:

$$(1) \quad M(F_0, G_0) = \max_{F \in \mathcal{F}_{[0,1]}} \min_{G \in \mathcal{F}_{[0,1]}} M(F, G) = \min_{G \in \mathcal{F}_{[0,1]}} \max_{F \in \mathcal{F}_{[0,1]}} M(G, F)$$

sau echivalent:

$$(2) \quad M(F, G_0) \leq M(F_0, G_0) \leq M(F_0, G) \text{ or } F, G \in \mathcal{F}_{[0,1]}$$

unde prin $M(F, G)$ am înțeles speranța matematică a lui K în raport cu F și G :

$$(3) \quad M(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dF(x) dG(y).$$

Se observă imediat că o strategie pură a unuia dintre parteneri, fie x , poate fi identificată cu o strategie mixtă dată de repartiția:

$$I_x(z) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z < x \\ 1 & \text{pentru } z \geq x \end{cases}$$

§2. Existența soluțiilor. Pentru jocurile continue J. Ville a stabilit existența strategiilor optime mixte pentru ambii jucători, în ipoteza continuității nucleului K în variabila (x, y) . Împunerea ipotezei algebrice de concavitate — convexitate a făcut posibilă demonstrarea existenței unor soluții optime pure sau de tip finit, după cum urmează:

Teorema 1. Fie jocul de nucleu $K: [0,1] \times [0,1]$, continuu în ambele variabile separat și concav (convex) în prima (a doua) variabilă. Atunci:

- (i) există strategii optime pure pentru primul (al doilea) partener
- (ii) există strategii optime de ordin cel mult doi pentru al doilea (primul) partener, de forma

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, (\mu x_1 + (1 - \mu) x_2), y_2 \in [0,1], 0 \leq \lambda \leq 1, x_1, x_2 \in [0,1], 0 \leq \mu \leq 1.$$

Din această teoremă rezultă imediat:

Teorema 2. Dacă nucleul K al unui joc continuu este continuu în ambele variabile separat și concav-convex, atunci are soluții pure.

De notat deasemeni că concavitatea sau convexitatea strictă atrag unicitatea strategiei optime pure a unuia sau altuia din parteneri.

§3, Avantajul folosirii strategiilor optime pure de către jucători decurge din superioritatea lor asupra strategiilor mixte, superioritate ilustrată de următoarele două teoreme:

Teorema 3. Dacă (x_0, y_0) este soluție pură, atunci $D^2(K) = 0$ ($D^2(K)$ fiind dispersia lui K în raport cu repartițiile I_{x_0} și I_{y_0}).

Teorema 4. Pentru un joc continuu al cărui nucleu $K(x, y)$ este continuu și concav în x și continuu și convex în y , clasa soluțiilor pure este completă, în sensul că, dacă (F, G) este o soluție mixtă, atunci există o soluție pură (x_0, y_0) , astfel ca

$$(4) \quad K(x_0, y) \geq M(F, I_y), \text{ or } y \in [0,1]$$

$$(5) \quad K(x, y_0) \leq M(I_x, G), \text{ or } x \in [0,1]$$

Aceste teoreme se demonstrează imediat pe baza rezultatelor stabilite de S. Huyberegts în [3].

Prima teoremă indică faptul că folosirea strategiilor optime pure le dă jucătorilor certitudinea că vor obține un câștig exact, egal cu valoarea jocului, iar nu în medie (ca în cazul strategiilor mixte).

Potrivit concluziei celei de a doua teoreme, o strategie optimă pură prezintă avantajul — față de oricare altă strategie optimă — că îi permite jucătorului ca în anumite cazuri să obțină un câștig mai mare decât v , (dar în nici un caz unul mai mic).

Este firesc atunci să căutăm cu precădere să determinăm soluțiile pure ale unui joc.

§4. Determinarea strategiilor optime pure. La baza metodei gradientului pentru clasa de jocuri considerată stă următoarea teoremă [1]).

Fie x, y considerate funcții de parametrul t și fie sistemul diferențial:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \text{ și } K'_x < 0 \\ K'_x(x(t), y(t)). & \text{în rest.} \end{cases} \\ \frac{dy}{dt} &= \begin{cases} 0 & \text{dacă } y = 0 \text{ și } K'_y > 0 \\ -K'_y(x(t), y(t)). & \text{în rest} \end{cases} \end{aligned}$$

(K'_x și K'_y fiind derivatele în raport cu x , respectiv y .)

Presupunem funcția $K(x, y)$ definită pentru $x \geq 0, y \geq 0$ strict concavă în x și convexă în y , ale cărei derivate K'_x și K'_y sînt continue în x și y separat;

Teorema 5. Dacă jocul de nucleu K are soluția pură (x_0, y_0) atunci sistemul (6) admite o soluție unică $x(t; x^*, y^*), y(t; x^*, y^*)$ ori care ar fi condițiile inițiale $x^*, y^* \geq 0$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$ (x_0 fiind unic datorită concavității stricte).

Rezultat care poate fi completat cu următorul ([1]).

Teorema 6. Dacă în plus, $K(x, y)$ este liniară în y , atunci $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$ (nu neapărat unic) astfel ca $(x_0, \bar{y})$ să fie soluție pură a jocului K .

Vom căuta să adaptăm aceste rezultate, jocurilor definite pe pătratul unitate. O cale pentru realizarea acestui scop este prelungirea convenabilă a funcției $K(x, y)$ în tot cadrantul pozitiv, astfel încît noul joc să se încadreze în condițiile teoremelor 5 sau 6.

Fie dar $K(x, y)$ definită pentru $x \geq 0, y \geq 0$ o după cum urmează:

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{pentru } 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ K(x, 1) + K'_y(x, 1) \cdot (y - 1) + (y - 1)^2. & \text{pentru } 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ K(1, y) + K'_x(1, y) \cdot (x - 1) - (x - 1)^2. & \text{pentru } x \geq 1, 0 < y \leq 1 \\ K(1, 1) + K'_x(1, 1) \cdot (x - 1) + K'_y(1, 1) \cdot (y - 1) + K''_{xy}(1, 1) \cdot (x - 1) \cdot (y - 1) - & \\ - (x - 1)^2 + (y - 1)^2. & \text{pentru } x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

Teorema 7. Fie jocul cu nucleu $K(x, y)$ $[0, 1] \times [0, 1]$, strict convex, în x , concav în y , de două ori derivabil în raport cu x și y și pentru care derivatele mixte de ordinul al III-lea K''_{xyy} și K''_{yxx} există și satisfac relațiile:

$$(8) \quad \begin{aligned} K''_{xyy}(1, y) &\geq 0 \text{ oricare } 0 \leq y < 1 \\ K''_{yxx}(x, 1) &\leq 0 \text{ oricare } 0 \leq x < 1. \end{aligned}$$

Atunci unica strategie optimă pură, x_0 a primului jucător se obține din relația:

$$(9) \quad x_0 = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x^*, y^*), & \text{dacă } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x^*, y^*) < 1 \\ 1 & \text{dacă } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x^*, y^*) \geq 1. \end{cases}$$

unde $x(t; x^*, y^*)$ este componenta soluției sistemului diferențial (6) scris pentru funcția $\mathcal{K}(x, y)$.

Demonstrație.

Pe baza teoremei 2, jocul K are soluție pură (x_0, y_0) în pătratul unitate, cu x_0 unic, deci:

$$(10) \quad K(x, y_0) \leq K(x_0, y_0) \leq K(x_0, y) \text{ orice } x \in [0, 1] \ y \in [0, 1].$$

Să arătăm că funcția $\mathcal{K}$ satisface condițiile teoremei 5.

Fie $0 \leq y < 1$, ca funcție de x $\mathcal{K}$ are forma:

$$(11) \quad \mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ K(1, y) + K'_x(1, y)(x-1) - (x-1)^2, & \text{pentru } x \geq 1 \end{cases}$$

derivată în raport cu x obținem:

$$\mathcal{K}'_x(x, y) = \begin{cases} K'_x(x, y), & \text{pentru } 0 \leq x < 1. \\ K'_x(1, y) - 2(x-1), & \text{pentru } x \geq 1. \end{cases}$$

Nu este greu de verificat, pe baza proprietăților funcției $K(x, y)$ că atât $\mathcal{K}$ cât și $\mathcal{K}'_x$ sînt funcții continue de x pentru $0 \leq y < 1$ fixat. În mod asemănător pentru $y \geq 1$.

$$(12) \quad \mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, 1) + K'_y(x, 1) \cdot (y-1) + (y-1)^2, & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ K(1, 1) + K'_x(1, 1) \cdot (x-1) + K'_y(1, 1) \cdot (y-1) + K''_{xy}(1, 1)(x-1) \cdot (y-1) - (x-1)^2 + (y-1)^2, & \text{pentru } x \geq 1. \end{cases}$$

și derivata sa:

$$\mathcal{K}'_x(x, y) = \begin{cases} K'_x(x, 1) + K''_{yx}(x, 1) \cdot (y - 1). & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ K'_x(1, 1) + K''_{xy}(1, 1) \cdot (y - 1) - 2(x - 1). & \text{pentru } x \geq 1 \end{cases}$$

sînt funcții de x continue pe semidreapta pozitivă. În fond, pentru y pozitiv fixat $\mathcal{K}$ și $\mathcal{K}'_x$ sînt funcții de x continue. Totodată, ca funcție de y , $\mathcal{K}'_x$ are expresia:

$$\mathcal{K}'_x(x, y) = \begin{cases} K'_x(x, y). & \text{pentru } 0 \leq y < 1 \\ K'_x(x, 1) + K''_{yx}(x, 1) \cdot (y - 1). & \text{pentru } y \geq 1 \end{cases} \quad \text{dacă } 0 \leq x < 1$$

$$\mathcal{K}'_x(x, y) = \begin{cases} K'_x(1, y) - 2(x - 1). & \text{pentru } 0 \leq y < 1 \\ K'_x(1, 1) + K''_{xy}(1, 1) \cdot (y - 1) - 2(x - 1) & \text{dacă } x \geq 1. \\ \text{pentru } y \geq 1 \end{cases}$$

ceea ce denotă continuitatea lui K' x în variabila y pentru orice $x \geq 0$ fixat.

Pe baza aceluiași considerente, folosind expresiile funcției $\mathcal{K}(x, y)$ cu x fixat:

$$(13) \quad \mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{pentru } 0 \leq y < 1 \\ K(x, y) + K'_y(x, 1) \cdot (y - 1) + (y - 1)^2. & \text{pentru } y \geq 1 \end{cases}$$

dacă $0 \leq x < 1$.

$$(14) \quad \mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} K(1, y) + K'_x(1, y) \cdot (x - 1) - (x - 1)^2. & \text{pentru } 0 \leq y < 1 \\ K(1, 1) + K'_x(1, 1) \cdot (x - 1) + K'_y(1, 1) \cdot (y - 1) + K''_{xy}(1, 1) \cdot (x - 1) \cdot (y - 1) - (x - 1)^2 + (y - 1)^2 & \text{pentru } y \geq 1 \end{cases}$$

Concludem că funcția $\mathcal{K}$ este continuă în variabila y iar $\mathcal{K}'_y$ este continuă în x și y separat.

O altă condiție cerută de teorema 5 este concavitătea strictă și convexitatea jocului.

Ori, după cum rezultă din ipotezele teoremei 7 și din expresiile (11), (12), derivata a doua a lui $\mathfrak{K}$ în raport cu variabilă x există și este:

$$K''_{xx}(x, y) = \begin{cases} K''_{xx}(x, y). & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ -2. & \text{pentru } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{dacă } 0 \leq y < 1$$

$$K''_{xx}(x, y) = \begin{cases} K''_{xx}(x, 1) + K'_{yxx}(x, 1)(y - 1). & \text{pentru } 0 < x < 1 \\ -2. & \text{pentru } x > 1. \end{cases} \quad \text{dacă } y \geq 1.$$

Concavitățile strictă a lui $\mathfrak{K}$ în x rezultă din faptul că toate expresiile de mai sus sînt strict negative.

Concavitățile lui $\mathfrak{K}$ în y se demonstrează pe baza relațiilor a analoage. Fie acum, sistemul diferențial (6) scris pentru funcția $\mathfrak{K}(x, y)$. Putem trage concluzia, pe baza celor arătate anterior, că sistemul are o soluție unică: $x(t; x^*, y^*), y(t; x^*, y^*)$ oricare ar fi condițiile inițiale $x^*, y^* \geq 0$.

Demonstrațiile teoremei se completează dacă se arată că dacă soluția (x_0, y_0) a jocului K este în interiorul pătratului unitate, atunci x_0 este unică strategie optimă pură a primului jucător în $\mathfrak{K}$. Într-adevăr, în acest caz condițiile teoremei 5 fiind verificate, soluția $x(t; x^*, y^*)$ va tinde către unicul x_0 căutat.

Se poate însă ca $x_0 = 1$ și $K'_x(1, y_0) > 0$, ceea ce indică faptul că pentru curba concavă $K(x, y_0)$, punctul de maxim 1 nu se bucură de proprietatea de a anula derivata. Atunci, datorită construcției, jocul $\mathfrak{K}$, va avea o soluție $(\bar{x}, \bar{y})$ în care $\bar{x} > 1$. Unicitatea lui $\bar{x}$ se datorește deasemenea concavității stricte.

Fie (x_0, y_0) soluția pură a lui K cu $x_0 \leq 1, y_0 < 1$, și $K'_x(1, y_0) = 0$ dacă $x_0 = 1$

$$\mathfrak{K}(x, y_0) = K(x, y_0) \leq K(x_0, y_0) = \mathfrak{K}(x_0, y_0) \quad \text{dacă } 0 \leq x < 1$$

inegalitatea datorîndu-se relației (10)

$$\mathfrak{K}(x, y_0) = K(1, y_0) + K'_x(1, y_0)(x - 1) - (x - 1)^2 \quad \text{dacă } x \geq 1$$

ori, $K(1, y_0) \leq K(x_0, y_0) = \mathfrak{K}(x_0, y_0)$ conform cu (10), iar datorită faptului că pe curba $K_x(x, y_0)$ $x_0 \leq 1$ este punct de maxim, $K'_x(1, y_0) \leq 0$ cu egalitatea doar dacă $x_0 = 1$. Deci:

$$(15) \quad \mathfrak{K}(x, y_0) \leq \mathfrak{K}(x_0, y_0) \quad \text{orice } x \geq 0$$

La fel: $\mathfrak{K}(x_0, y) = K(x_0, y) \geq K(x_0, y_0) = \mathfrak{K}(x_0, y_0)$ dacă $0 \leq y < 1$

$$\mathfrak{K}(x_0, y) = K(x_0, 1) + K'_y(x_0, 1)(y - 1) + (y - 1)^2 \geq K(x_0, y_0) = \mathfrak{K}(x_0, y_0) \quad \text{dacă } y \geq 1.$$

inegalități rezultînd din considerente asemănătoare celor de mai înainte. Prin urmare:

$$(16) \quad \mathfrak{K}(x, y) \leq \mathfrak{K}(x_0, y_0) \leq \mathfrak{K}(x_0, y) \quad \text{orice } x \geq 0, y \geq 0$$

relație care implică rezultatul dorit.

Menționăm că rezultatele teoremei se pot îmbogăți permițând obținerea întregii soluții (x_0, y_0) , dacă convexitatea funcției $\mathcal{K}(x, y)$ va fi presupusă strictă.

BIBLIOGRAFIE

- 1). K. Arrow, L. Hurwicz, K. Uzawa, Studies in Linear and nonLinear — Programming.
- 2) .H. F. Bohnenblust, S. Karlin, L. S. Shapley, "Games with continuous convex Pay-off" in Contributions to the Theory of Games vol. I (1950).
- 3). S. Huyberegts — "Sur la problème de l'unicité de la solution des jeux sur le carré-unité" — Bulletin de la classe des Sciences de l'Academie Royale Beliques vol. 44 (1958).
- 4). S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games Programming and Economics vol. II.

Primită la redacție la 20.XII. 1969.

Universitatea București
Facultatea de matematică — mecanică

МЕТОД ГРАДИЕНТА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ, ВЫПУКЛЫХ ИГР

Краткое содержание

Известно, что непрерывные игры с выпуклым ядром, позволяют чистое решение. В работе указывается метод решения этих игр, пользуясь результатами К. Эрроу и Л. Курвича.

GRADIENT METHOD FOR CONVEX CONTINUOUS GAMES

Abstract

As it is known, a concav-convex continuous game has a pure solution. In this work a way for solving this game is given, using K. Arrow's and L. Hurwicz's results.

CONTENTS
ORIGINAL ARTICLES
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN
SYMPTOMS OF THE ACUTE INFLUENZA VIRUS IN MAN

FUNȚII DE TENSIUNE ÎN ELASTODINAMICĂ

P. P. TEODORESCU

În cele ce urmează se indică modul de a obține ecuațiile de mișcare ale corpurilor elastice, se menționează metodele de rezolvare ce pot fi adoptate și se introduce metoda funcțiilor potențial. Pe această cale se dă o reprezentare de tip Finzi pentru ecuațiile de mișcare, iar — în particular — se dau reprezentări de tip Maxwell și Morera. Punând condiția ca și ecuațiile de tip Beltrami în caz dinamic să fie verificate, se găsește o reprezentare de tip Schaefer, care pune în evidență modul de propagare a undelor elastice.

1. Introducere. Problemele dinamice ale corpurilor elastice ocupă un rol din ce în ce mai important, atât în cercetarea teoretică cât și în proiectarea inginerescă. Probleme de acest tip apar în cazul vibrațiilor proprii sau forțate, precum și în cazul propagării undelor în medii elastice.

În cele ce urmează vom prezenta o metodă cu caracter general pentru tratarea acestor probleme.

2. Cinematica deformației. În momentul în care trecerea de la *starea inițială* (înainte de aplicarea sarcinilor exterioare) la *starea finală* (după aplicarea acestor sarcini) nu se mai produce teoretic instantaneu sau practic într-un timp foarte scurt, care nu este — în general — luat în considerare, fenomenul devine *dinamic* și este necesar un studiu al cinematicii deformației.

În acest caz, deplasările vor depinde și de variabila temporală și vom avea

$$(1) \quad u = u(x, y, z, t); \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t),$$

în *coordonate materiale* (ale punctului în starea inițială), independente de timp, sau

$$(1') \quad u = u(x^*, y^*, z^*; t); \quad v = v(x^*, y^*, z^*; t), \quad w = w(x^*, y^*, z^*; t),$$

în *coordonate spațiale* (ale punctului în starea finală), funcții de timp

$$(2) \quad x^* = x^*(t), \quad y^* = y^*(t), \quad z^* = z^*(t).$$

Menționăm că între aceste coordonate avem relații de forma

$$(3) \quad x^* = x + u, \quad y^* = y + v, \quad z^* = z + w,$$

care se pot scrie vectorial

$$(3') \quad \vec{r}^* = \vec{r} + \vec{u},$$

unde $\vec{r}^*$ este vectorul de poziție al particulei din corp înainte de deformare, $\vec{r}$ este vectorul de poziție al aceleiași particule după deformare (vectori raportați la același reper), iar $\vec{u}$ este vectorul deplasare.

Ținând seama de faptul că viteza este derivata vectorului de poziție (remarcăm că trebuie luat în considerație vectorul de poziție după deformare) în raport cu timpul

$$(4) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}^*}{dt},$$

folosind relația (3') și ținând seama de (2), putem scrie

$$(5) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx^*}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y^*} \frac{dy^*}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z^*} \frac{dz^*}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

În cazul micilor deformări și rotații neglijăm termenii neliniari și rămânem cu viteza de deplasare

$$(6) \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \dot{\vec{u}},$$

unde derivata parțială în raport cu timpul este notată cu un punct; în felul acesta, componentele vitezei de deplasare vor fi

$$(6') \quad v_x = \dot{u} = \dot{u}(x, y, z; t), \quad v_y = \dot{v} = \dot{v}(x, y, z; t), \quad v_z = \dot{w} = \dot{w}(x, y, z; t).$$

Prin neglijarea derivatei spațiale, se reduce derivata substanțială la cea temporală.

Fie $f = f(x, y, z) = f(x^*, y^*, z^*)$ o funcție de clasa C^1 , exprimată în coordonate materiale sau exprimată în coordonate spațiale. Derivata sa în raport cu una din variabilele se va putea scrie sub forma

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^*} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y^*} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}$$

unde am ținut seama de relațiile (3); se observă astfel că, în cazul deformațiilor infinitezimale, nu mai este nevoie să facem distincție între coordo-

natele materiale și coordonatele spațiale. În felul acesta vom folosi numai coordonate materiale și vom scrie relații de forma (6').

Pe aceeași cale putem introduce și accelerația

$$(8) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}^*}{dt^2} = \frac{d^2\vec{u}}{dt^2};$$

în cazul micilor deformații și rotații vom avea, de asemenea,

$$(9) \quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \ddot{\vec{u}},$$

Componentele *accelerației de deplasare* vor fi astfel

$$(9') \quad \begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{u} = \ddot{u}(x, y, z; t), \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{u} = \ddot{u}(x, y, z, t), \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{u} = \ddot{u}(x, y, z; t). \end{aligned}$$

Deformațiile specifice liniare vor fi de forma

$$(10) \quad \varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z; t), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y, z; t), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y, z; t),$$

iar pentru deformațiile specifice unghiulare putem scrie

$$(10') \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(x, y, z; t), \quad \gamma_{zx} = \gamma_{zx}(x, y, z; t), \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z; t).$$

3. Ecuații de mișcare. De asemenea, tensiunile normale vor fi de forma

$$(11) \quad \sigma_x = \sigma_x(x, y, z; t), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z; t), \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z; t),$$

iar pentru tensiunile tangențiale putem scrie

$$(11') \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z; t), \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z; t), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z; t).$$

În ceea ce privește ecuațiile de mișcare, vom putea folosi ecuațiile de echilibru, în care trebuie să înlocuim forțele volumice prin *forțele pierdute ale lui d'Alambert* (tot de natura unor forțe volumice, deoarece trebuie raportate la unitatea de volum). Aceasta conduce la necesitatea introducerii *forței de inerție volumice* $\left[-\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \right]$, unde am ținut seama de legea a doua a lui Newton (se introduce derivata substanțială a impulsului), de faptul că forța trebuie raportată la unitatea de volum (ρ este masa specifică) și de formula (5) pentru viteză.

În cazul corpurilor *omogene* $\rho = \text{const}$ sau $\rho = \rho(t)$. În primul din aceste cazuri obținem forța de inerție volumică $\left(-\rho \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \right)$. În general însă, putem avea $\rho = \rho(x, y, z; t)$.

În cazul *deformațiilor infinitezimale*, derivatele substanțiale pot fi înlocuite cu derivatele temporale și vom avea forța de inerție volumică $\left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \right]$; dacă $\rho = \rho(x, y, z)$, nedepinzînd de timp (deci, eventual, un corp neomogen), forța de inerție volumică capătă forma mai simplă $(-\rho \ddot{\vec{u}})$.

În acest din urmă caz, pe care-l vom lua în considerație în cele ce urmează, ecuațiile de mișcare, în lipsa forțelor volumice, se vor putea scrie sub forma

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \ddot{u}, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \ddot{v}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \ddot{w}. \end{cases}$$

Ecuațiile (12) corespund la *micile mișcări neamortizate* ale solidelor deformabile; în cazul micilor mișcări amortizate trebuie introduse forțe de amortizare (tot de natura unor forțe volumice), date de anumite legi de natură experimentală. Cel mai interesant caz este acela în care forța de amortizare volumică este proporțională cu viteza, deci este de forma

$\left(-\nu \frac{d\vec{u}}{dt} \right)$, unde ν este un coeficient specific de amortizare (raportat la unitatea de volum). Acest coeficient poate fi, eventual, de forma $\nu = \nu(x, y, z; t)$; semnul $(-)$ apare datorită faptului că forța de amortizare volumică se opune mișcării.

În cazul deformațiilor infinitezimale, forța de amortizare volumică va fi $(-\nu \dot{\vec{u}})$; toate rezultatele ce se vor obține pentru micile mișcări neamortizate se vor putea transcrie pentru cazul micilor mișcări amortizate, prin înlocuirea operatorului diferențial $\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ prin operatorul diferențial $\left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right)$.

4. Sistemul fundamental de ecuații al problemei. La ecuațiile de mai sus va trebui să adugăm relațiile dintre deformații specifice și deplasări

$$(13) \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(13') \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

precum și legea lui Hooke (caz liniar elastic)

$$(14) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{aligned}$$

$$(14') \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy},$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală, μ este coeficientul de contracție transversală al lui Poisson iar G este modulul de elasticitate transversală, exprimat în raport cu primele constante elastice prin relația

$$(15) \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

În cazul unui corp liniar elastic, izotrop și omogen, care suferă deformații infinitezimale, ecuațiile (12), (13), (13'), (14), (14') formează *sistemul fundamental de ecuații* al problemei. Plecînd de la acest sistem putem rezolva problema, obținînd o soluție unică, în anumite condiții la limită (condiții pe contur și condiții inițiale) date.

Astfel, condițiile la limită se scriu sub forma

$$(16) \quad \begin{cases} p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z), \\ p_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z), \\ p_{nz} = \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z), \end{cases}$$

pentru orice moment $t \geq t_0$, unde t_0 este momentul inițial, iar $p_{nx} = p_{nx}(x, y, z; t)$, $p_{ny} = p_{ny}(x, y, z; t)$, $p_{nz} = p_{nz}(x, y, z; t)$ sînt componentele sarcinii exterioare pe elementul de contur de normală exterioară $\vec{n}$, sau sub forma

$$(16') \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0,$$

unde $u_0 = u_0(x, y, z; t)$, $v_0 = v_0(x, y, z; t)$, $w_0 = w_0(x, y, z; t)$ sînt deplasările corespunzătoare aceluiași element de contur, la momentul $t \geq t_0$.

Condițiile inițiale se scriu sub forma (la momentul $t = t_0$)

$$(17) \quad u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0,$$

$$(17') \quad \dot{u} = \dot{u}^0, \quad \dot{v} = \dot{v}^0, \quad \dot{w} = \dot{w}^0,$$

unde $u^0 = u^0(x, y, z)$, $v^0 = v^0(x, y, z)$, $w^0 = w^0(x, y, z)$, $\dot{u}^0 = \dot{u}^0(x, y, z)$, $\dot{v}^0 = \dot{v}^0(x, y, z)$, $\dot{w}^0 = \dot{w}^0(x, y, z)$ sînt deplasările, respectiv vitezele de deplasare în tot domeniul ocupat de corpul elastic la momentul inițial.

În cazul în care condițiile pe contur se pun în tensiuni, sub forma (16), avem de-a face cu *prima problemă fundamentală* a teoriei elasticității, iar în cazul în care aceste condiții se pun în deplasări, sub forme (16'),

avem de-a face cu *a doua problemă fundamentală*. În sfârșit, dacă condițiile se pun în tensiuni pe o parte a conturului și în deplasări pe rest, avem de-a face cu *problema fundamentală mixtă*.

În acest caz este convenabilă o *rezolvare în deplasări* a problemei (deplasările alegându-se drept funcții necunoscute) sau o *rezolvare în tensiuni* (funcțiile necunoscute sînt tensiunile), după cum avem de-a face cu una sau alta dintre problemele fundamentale menționate.

Astfel, prin eliminarea tensiunilor și deformațiilor specifice se obțin ecuații de tip G. Lamé, în caz dinamic, iar prin eliminarea deplasărilor și deformațiilor specifice se obțin ecuații de timp E. Beltrami, în caz dinamic *) (date de noi în [11], [12])

$$(18) \quad \begin{cases} \square_2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0, \\ \square_2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial}{\partial t^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0, \\ \square_2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial}{\partial t^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0, \end{cases}$$

$$(18') \quad \begin{cases} \square_2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0, \\ \square_2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0, \\ \square_2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0. \end{cases}$$

Într-o rezolvare în deplasări a problemei, va trebui astfel integrat sistemul de ecuații de tip Lamé (trei ecuații pentru cele trei componente ale vectorului deplasare), cu condițiile la limită aferente; într-o rezolvare în tensiuni, trebuie să integrăm sistemul de ecuații format din cele șase ecuații de tip Beltrami (18), (18') și din ecuațiile de mișcare (12); acest sistem de nouă ecuații cu șase funcții necunoscute este compatibil.

5. Metoda funcțiilor potențial. Metoda funcțiilor potențial este deosebit de utilă în studiul ecuațiilor fizicii matematice, în general, și în studiul ecuațiilor teoriei elasticității, în particular. Se pune problema exprimării funcțiilor necunoscute ale problemei cu ajutorul unor funcții potențial, asupra cărora acționează anumiți operatori diferențiali. Aceste funcții potențial devin acum noile funcții necunoscute ale problemei; avem avantajul că fiecare dintre funcțiile potențial verifică cîte o singură ecuație diferențială, realizîndu-se în felul acesta o decuplare a funcțiilor necunoscute. În ceea ce privește însă condițiile la limită nu se mai menține acest avantaj.

*) Operatorul $\square_2$ se va defini la punctul 9.

Se observă că, exprimînd deplasările sau tensiunile cu ajutorul funcțiilor potențial se obțin, pentru acestea din urmă, condiții la limită în care nu apare numai cîte una din aceste funcții; prin urmare, prin procedeul folosit nu se obține—în general—și o decuplare a acestor condiții. Problema rămîne deschisă; ea este de o mare importanță, deoarece — prin rezolvarea ei—problemele la limită ale teoriei clasice a elasticității s-ar putea reduce la probleme clasice ale ecuațiilor fizicii matematice.

Evident, în acest caz *problema completitudinii* reprezentărilor prin funcții potențial joacă un rol esențial. Menționăm că o reprezentare a unei stări de solicitare (stare de deplasare sau stare de tensiune) este *completă* dacă orice stare de solicitare se poate exprima sub această formă.

6. Istoric. Prima reprezentare, în cazul unei rezolvări în deplasări, a fost dată încă din secolul trecut de către A. Clebsch [1]. Mult mai recent, tot într-o rezolvare în deplasări, Maria Iacovache [4] a dat o reprezentare cu ajutorul a trei funcții care verifică dubla ecuație a undelor; pornind de la aceste rezultate, E. Sternberg și R. A. Eubanks [10] au dat o reprezentare cu ajutorul a trei funcții ce verifică ecuația undelor transversale și cu ajutorul unei funcții ce verifică ecuația undelor longitudinale. Menționăm faptul că acești din urmă cercetători s-au ocupat și de completitudinea reprezentării; de asemenea, ei au arătat că, dacă coeficientul lui Poisson $\mu = 1/4$, una din funcțiile potențial de deplasare poate fi luată egală cu zero sau se poate exprima cu ajutorul celorlalte.

Într-o rezolvare în tensiuni se pot folosi două metode. Într-o primă metodă se pleacă de la ecuațiile de tip Beltrami și se dă o reprezentare pentru acesta ecuații; apoi se pune condiția ca și ecuațiile de mișcare să fie verificate. Noi [11], [12], am dat o reprezentare de acest fel, cu ajutorul a trei funcții care verifică dubla ecuație a undelor; reprezentarea respectivă este completată.

O altă cale este aceea de a pleca de la ecuațiile de mișcare (12); în felul acesta vom da, în cele ce urmează, o reprezentare analoagă celei dată de B. Finzi [2] în caz static; prin particularizare se vor obține reprezentări ce generalizează pe cele date de J. C. Maxwell [7] sau G. Morera [8]. Menționăm faptul că, în cazul corpurilor de tip Cosserat, aceste reprezentări au fost generalizate de W. Günther [3], în caz static, și de G. Kluge [6], în caz dinamic.

Punînd condiția ca și ecuațiile de tip Beltrami, în caz dinamic, să fie verificate, vom ajunge la o reprezentare care generalizează pe cea a lui H. Schaefer [9], din cazul static. O altă generalizare a acestei reprezentări a fost făcută de S. Kessel [5], pentru cazul corpurilor de tip Cosserat, tot pentru solicitări statice.

În cele ce urmează ne vom ocupa astfel de cazul unor funcții potențial de tensiune.

7. Reprezentarea de tip Finzi. Plecând de la ecuațiile de mișcare (12) se poate arăta că tensiunile se exprimă sub forma

$$(19) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{yz}}{\partial y \partial z} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_{xx} - \left(\frac{\partial f'_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial f'_{zx}}{\partial y} \right) \right], \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{zx}}{\partial z \partial x} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_{yy} - \left(\frac{\partial f'_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial f'_{xy}}{\partial z} \right) \right], \\ \sigma_z = \frac{\partial^2 F_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{xy}}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_{zz} - \left(\frac{\partial f'_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial f'_{yz}}{\partial x} \right) \right], \end{cases}$$

$$(19') \quad \begin{cases} \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial F_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 F_{xx}}{\partial y \partial z} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_{yz} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f'_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial f'_{yy}}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f'_{zz}}{\partial x} - \frac{\partial f'_{xz}}{\partial z} \right) \right], \\ \tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial F_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 F_{yy}}{\partial z \partial x} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_{zx} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f'_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial f'_{zz}}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f'_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial f'_{yx}}{\partial x} \right) \right], \\ \tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial F_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 F_{zz}}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_{xy} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f'_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial f'_{xx}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f'_{yy}}{\partial z} - \frac{\partial f'_{zy}}{\partial y} \right) \right], \end{cases}$$

iar deplasările sub forma

$$(20) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial f_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zx}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial f'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial f'_{zz}}{\partial z} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial f'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial f'_{yz}}{\partial z} \right), \\ v = \frac{\partial f_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial f'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f'_{xz}}{\partial z} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial f'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial f'_{zz}}{\partial z} \right), \\ w = \frac{\partial f_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial f'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial f'_{yz}}{\partial z} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial f'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f'_{xz}}{\partial z} \right), \end{cases}$$

unde funcțiile potențial introduse sînt componente ale *tensorului simetric al lui Finzi*

$$(21) \quad T_F \equiv \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{zx} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{yz} & F_{zz} \end{pmatrix}$$

și componente ale tensorului simetric T_f și ale tensorului asimetric $T_{f'}$

$$(22) \quad T_f \equiv \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}, \quad T_{f'} \equiv \begin{pmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} & f'_{xz} \\ f'_{yx} & f'_{yy} & f'_{yz} \\ f'_{zx} & f'_{zy} & f'_{zz} \end{pmatrix},$$

depinzînd de cele trei variabile spațiale și de variabila temporală.

Reprezentarea dată este completă; componentele tensorilor T_F și T_f trebuie să fie de clasa C^3 iar componentele tensului $T_{f'}$ trebuie să fie de clasa C^4 .

Observăm că putem particulariza reprezentarea de mai sus, fără a pierde generalitatea (și completitudinea reprezentării), luînd tensorul $T_{f'}$ egal cu zero.

8. Reprezentări de tip Maxwell și Morera. Dacă, în cazul particular de mai sus ($T = 0$) facem

$$(23) \quad F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0, \quad f_{yz} = f_{zx} = f_{xy} = 0,$$

găsim o reprezentare de tip Maxwell

$$(24) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{zz}}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial^2 f_{xx}}{\partial t^2}, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{xx}}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 f_{yy}}{\partial t^2}, \\ \sigma_z = \frac{\partial^2 F_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_{yy}}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 f_{zz}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

$$(24') \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 F_{xx}}{\partial y \partial z}, \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial^2 F_{yy}}{\partial z \partial x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F_{zz}}{\partial x \partial y},$$

$$(24'') \quad u = \frac{\partial f_{xx}}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f_{yy}}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial f_{zz}}{\partial z},$$

iar dacă facem

$$(23') \quad F_{xx} = F_{yy} = F_{zz} = 0, \quad f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0,$$

găsim o reprezentare de tip Morera

$$(25) \quad \sigma_x = -2 \frac{\partial^2 F_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \sigma_y = -2 \frac{\partial^2 F_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad \sigma_z = -2 \frac{\partial^2 F_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$(25') \quad \begin{cases} \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial F_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial z} \right) + \rho \frac{\partial^2 f_{yz}}{\partial t^2}, \\ \tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial F_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial^2 f_{zx}}{\partial t^2}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial F_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{zx}}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial^2 f_{xy}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

$$(25'') \quad u = \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zx}}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial f_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial f_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial y}.$$

Amîndouă aceste reprezentări sînt complete.

9. Reprezentarea de tip Schaefer. Vom pune acum condiția ca reprezentarea de tip Finzi, dată mai sus, să verifice și ecuațiile de tip Beltrami (18, (18')), ca și ecuațiile de tip Lamé.

$$(26) \quad \begin{cases} \square_2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ \square_2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ \square_2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \end{cases}$$

Se introduc operatorii lui d'Alembert

$$(27) \quad \square_i = \Delta - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2),$$

unde Δ este operatorul lui Laplace

$$(28) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

c_1 este viteza de propagare a undelor longitudinale (primare), dată de

$$(29) \quad \frac{1}{c_1^2} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E},$$

iar $c_2 < c_1$ este viteza de propagare a undelor transversale (secundare), exprimată prin

$$(29') \quad \frac{1}{c_2^2} = 2(1+\mu) \frac{\rho}{E}.$$

Alegem componentele tensorului T_F al lui Finzi sub forma

$$(30) \quad F_{xx} = \Theta_{yy} + \Theta_{zz} - \Omega, \quad F_{yy} = \Theta_{zz} + \Theta_{xx} - \Omega, \quad F_{zz} = \Theta_{xx} + \Theta_{yy} - \Omega,$$

$$(30') \quad F_{yz} = -\Theta_{yz}, \quad F_{zx} = -\Theta_{zx}, \quad F_{xy} = -\Theta_{xy}$$

și componentele tensorului T_f sub forma

$$(31) \quad f_{xy} = \theta_{yy} + \theta_{zz} - \omega, \quad f_{yy} = \theta_{zz} + \theta_{xx} - \omega, \quad f_{zz} = \theta_{xx} + \theta_{yy} - \omega,$$

$$(31') \quad f_{yz} = -\theta_{yz}, \quad f_{zx} = -\theta_{zx}, \quad f_{xy} = -\theta_{xy};$$

componentele tensului T_f vor fi luate egale cu zero. În felul acesta se introduc tensorii simetrici

$$(32) \quad T_\Theta \equiv \begin{Bmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{zx} \\ \Theta_{xy} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{yz} & \Theta_{zz} \end{Bmatrix}, \quad T_\theta \equiv \begin{Bmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{zx} \\ \theta_{xy} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{yz} & \theta_{zz} \end{Bmatrix},$$

pimul dintre aceștia fiind *tensorul lui Schaefer*; componentele acestor tensori vor fi funcții de cele trei variabile spațiale și de timp, ca și funcțiile $\Omega = \Omega(x, y, z; t)$ și $\omega = \omega(x, y, z; t)$, trebuind să aparțină clasei C^3 pentru a putea verifica acuatiile de mișcare.

Se constată că între funcțiile ω și Ω are loc relația

$$(33) \quad \omega + \frac{1+\mu}{E} \Omega = 0,$$

iar între primii invarianti ai tensorilor T_θ și T_Θ se va scrie relația

$$(34) \quad \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz} + \frac{1+\mu}{E} (\Theta_{xx} + \Theta_{yy} + \Theta_{zz}) = 0;$$

mai general, componentele tensorului T_θ se vor exprima prin componentele tensorului T_Θ sub forma

$$(35) \quad \theta_{xx} = \frac{1+\mu}{E} (\Theta_{xx} - \Theta_{yy} - \Theta_{zz}), \quad \theta_{yy} = \frac{1+\mu}{E} (\Theta_{yy} - \Theta_{zz} - \Theta_{xx}),$$

$$\theta_{zz} = \frac{1+\mu}{E} (\Theta_{zz} - \Theta_{xx} - \Theta_{yy}),$$

$$(35') \quad \theta_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \Theta_{yz}, \quad \theta_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \Theta_{zx}, \quad \theta_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \Theta_{xy}.$$

În felul acesta, starea de tensiune se va exprima sub forma

$$(36) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Theta_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Theta_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Theta_{yz}}{\partial z \partial y} - \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Omega, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Theta_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Theta_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Theta_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \Theta_{zx}}{\partial z \partial x} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Omega, \\ \sigma_z = \frac{\partial^2 \Theta_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Theta_{zz}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \Theta_{xy}}{\partial x \partial y} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Omega, \end{cases}$$

$$(36') \quad \begin{cases} \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Theta_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Theta_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Theta_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\Theta_{yy} + \Theta_{zz} - \Omega) - \\ \quad - 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \Theta_{yz}}{\partial t^2}, \\ \tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Theta_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Theta_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \Theta_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\Theta_{zz} + \Theta_{xx} - \Omega) - \\ \quad - 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \Theta_{zx}}{\partial t^2}, \\ \tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Theta_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \Theta_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Theta_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\Theta_{xx} + \Theta_{yy} - \Omega) - \\ \quad - 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \Theta_{xy}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

iar starea de deplasare se va scrie

$$(37) \quad \begin{cases} 2Gu = \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Theta_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Theta_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \Theta_{zx}}{\partial z} \right), \\ 2Gv = \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \left(\frac{\partial \Theta_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Theta_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Theta_{yz}}{\partial z} \right), \\ 2Gw = \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Theta_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \Theta_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Theta_{zz}}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Componentele tensorului T_Θ trebuie să verifice ecuația undelor transversale

$$(38) \quad \square_2 \Theta_{xx} = \square_2 \Theta_{yy} = \square_2 \Theta_{zz} = 0,$$

$$(38') \quad \square_2 \Theta_{yz} = \square_2 \Theta_{zx} = \square_2 \Theta_{xy} = 0,$$

iar funcția Ω trebuie să verifice ecuația

$$(39) \quad \square_1 \Omega = \frac{1}{1 - \mu} \left[\frac{\partial^2 \Theta_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{zz}}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Theta_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Theta_{zx}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \Theta_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \right]$$

Se găsește astfel o reprezentare completă pentru problema dinamică, cu ajutorul tensorului T_Θ , ale cărui componente verifică ecuațiile (38), (38'),

și a funcției Ω , care verifică ecuația (39); toate aceste funcții trebuie să fie de clasa C^4 .

10. Concluzii. Prin apariția operatorilor lui d'Alembert se observă că reprezentarea de mai sus poate fi foarte utilă pentru problemele de propagare a undelor elastice.

Mai observăm că, în tot ceea ce s-a arătat mai sus, nu a fost vorba de condițiile la limită.

Este interesant de menționat că, în caz static, H. Schaefer a găsit o analogie între expresiile funcțiilor potențial pe contur și eforturile (momente încovoietoare, momente de răsucire) într-o placă curbă subțire care admite suprafața exterioară a corpului drept suprafață mediană. În felul acesta au fost date prețioase indicații cu privire la decuplarea funcțiilor potențial în condițiile pe contur, prin rezolvarea unei probleme de placă curbă subțire.

În caz dinamic însă, problema este deschisă.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Clebsch: Über die Reflexion an einer Kugelfläche, Journ. reine und angew. Math., vol. 61, 1863, p. 195.
2. B. Finzi: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui, Rend. R. Accad. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., seria 6, vol. 19, 1934, pp. 578—584; pp. 620—623.
3. W. Günther: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abh. der Braunschweig. Wiss. Gesellschaft, vol. X, 1958, pp. 195—213.
4. M. Iacovache: O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuațiilor elastici-tății, Bul. șt. Acad. R.P.R., ser. A, vol. I, nr. 6, 1949, pp. 592—599.
5. S. Kessel: Die Spannungsfunktionen des Cosserat-Kontinuums, Z.A.M.M., vol. 47, nr. 5, 1967, pp. 329—336.
6. G. Kluge: Zur Dynamik der allgemeinen Versetzungstheorie bei Berücksichtigung von Momentenspannungen, Int. J. Engng. Sci., vol. 7, nr. 2, 1969, pp. 169—182.
7. J. C. Maxwell: On reciprocal figures, frames and diagrams for forces, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 25, 1870, pp. 1—40.
8. G. Morera: Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo, Atti della R. Accad. dei Lincei, Rendiconti, Cl. Sci. fis., mat. e nat., seria 5, vol. I, 1892, pp. 137—141.
9. H. Schaefer: Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers, Z.A.M.M., vol. 33, 1953, p. 356.
10. E. Sternberg, R. A. Eubanks: On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation, Quart. Appl. Math., vol. 15, nr. 2, 1957, p. 149.
11. P. P. Teodorescu: Sur une représentation par potentiels dans le problème tridimensionnel de l'élastodynamique, C. Rend. hebdom. des séances de l'Acad. des Sci., vol. 250, nr. 10, 1960, pp. 1792—1794.
12. P. P. Teodorescu: Asupra problemei spațiale a elastodinamicii, St. și cerc. mec. apl., vol. XI, nr. 3, 1960, pp. 681—694.

Primită la redacție la 10.II. 1970

Universitatea București
Facultatea de matematică—mecanică

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ УПРУГОСТИ

Краткое содержание

Дается способ получения уравнений движения для упругих тел. отмечаются методы решения и вводится метод функций потенциал. В связи с этим даются представления типа Финци, для уравнений движения, а также, в частности, представления типа Максвелла и Морера. Ставив условие, чтобы и уравнения типа Бельтрами в динамическом случае были удовлетворены, находится представление типа Шеффера, которое выявляет каким образом распространяются упругие волны.

FONCTIONS DE TENSION EN ÉLASTODYNAMIQUE

Résumé

Dans ce qui va suivre l'on indique la modalité d'obtenir les équations de mouvement des corps élastiques, l'on mentionne les méthodes de résolution qu'on peut adopter et l'on introduit la méthode des fonctions potentiel. C'est ainsi qu'on donne une représentation du type de Finzi pour les équations de mouvement, ainsi qu'en particulier des représentations du type de Maxwell et de Morera. En posant la condition que les équations du type de Beltrami dans le cas dynamique soient vérifiées, on trouve une représentation du type de Schaefer, qui met en évidence le mode de propagation des ondes élastiques.

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

MATEMATICĂ - MECANICĂ

ANUL XIX — Nr. 2 — 1970

MATEMATICĂ-MECANICĂ

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *Miron Nicolescu*

Membri: Acad. prof. *Caius Iacob*; acad. prof. *Gheorghe Vrănceanu*;
prof. dr. docent *Gheorghe Galbură*; prof. dr. *George Ciucu*;
prof. dr. docent *Romulus Cristescu*; prof. dr. docent *Ciprian*
Foiaș; prof. dr. *Viorica Ionescu-Cazimir*; prof. dr. docent *Cabiria*
Andreian Cazacu.

Secretar: Conf. dr. docent *P. P. Teodorescu*

REDACȚIA

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

B-dul. Gh. Gheorghiu-Dej nr. 64

Telefon 160187/5

S U M A R

	Pag.
Comitetul de redacție: Academician profesor Gheorghe Vrănceanu la 70 de ani	7
CABIRIA ANDREIAN CAZACU: Asupra unei formule de transformare pentru modulul familiilor de suprafețe	9
M. CRAIOVEANU: Asupra unei teoreme a lui Rham pentru fibratoarele integrabile	15
V. CRAIU, D. V. ILIESCU și V. GH. VODĂ: Unele aspecte ale problemei de- fectelor într-un proces de producție	21
V. CRAIU și V. GH. VODĂ: Asupra unui spațiu măsurabil(1)	33
VIRGILIU GANEA: Obiecte geometrice asociate unei ecuații algebrice de grad n într-un spațiu vectorial E_n	37
EFTIMIE I. GRECU: Spații Riemann V_2 cu conexiune liniară local euclidiene	45
STERE IANUȘ: Distribuții paralele pe varietăți cu conexiune afină	75
RADU IORDANESCU: Studiul reductibilității operatorilor infinitezimale asociați algebrelor Jordan simple	83
LILIANA MAXIM: Asupra geometriei prelungirilor fibratelor Banach	91
N. MIHĂILEANU: Asupra spațiilor lui Einstein centrale simetrice	101
TIBERIU POSTELNICU: Aplicații ale curbei caracteristice operative la unele fișe de control	105
P. STAVRE: Unele proprietăți ale conexiunilor	113
ION D. TEODORESCU, NICOLAE I. NEDIȚĂ și LIVIU NICOLESCU: Spații local euclidiene A_2 cu caracteristice drepte paralele de speța a doua . .	117
P. P. TEODORESCU: Tendințe de dezvoltare în teoria elasticității	129
M. TZARINA: Asupra grupului omogen de omonomie al spațiilor proiectiv euclidiene	153
IZU VAISMAN: Asupra transformărilor infinitezimale foliat-conforme ale unei varietăți riemanniene foliate	161
T. WESZELY: Asupra vectorilor tangenți la varietățile finite definite pe sfere	171

170	THE HISTORY OF THE
171	THE HISTORY OF THE
172	THE HISTORY OF THE
173	THE HISTORY OF THE
174	THE HISTORY OF THE
175	THE HISTORY OF THE
176	THE HISTORY OF THE
177	THE HISTORY OF THE
178	THE HISTORY OF THE
179	THE HISTORY OF THE
180	THE HISTORY OF THE
181	THE HISTORY OF THE
182	THE HISTORY OF THE
183	THE HISTORY OF THE
184	THE HISTORY OF THE
185	THE HISTORY OF THE
186	THE HISTORY OF THE
187	THE HISTORY OF THE
188	THE HISTORY OF THE
189	THE HISTORY OF THE
190	THE HISTORY OF THE
191	THE HISTORY OF THE
192	THE HISTORY OF THE
193	THE HISTORY OF THE
194	THE HISTORY OF THE
195	THE HISTORY OF THE
196	THE HISTORY OF THE
197	THE HISTORY OF THE
198	THE HISTORY OF THE
199	THE HISTORY OF THE
200	THE HISTORY OF THE

SOMMAIRE

	Page
Comité de rédaction: Le professeur Gh. Vrănceanu, membre de l'Académie Roumaine, à son 70-ème anniversaire	7
CABIRIA ANDREIAN CAZACU: On a Transformation Formula for the Module of Surface Families	9
M. CRAIOVEANU: Sur un théorème de Rham pour les fibrés intégrables	15
V. CRAIU, D.V. ILIESCU and V. Gh. VODĂ: Some Aspects of the Problem of Defective in a Batch	21
V. CRAIU and V. Gh. VODĂ: On a Measurable Space (1)	33
VIRGILIU GANEA: Objets géométriques associés à une équation algébrique de degré n dans un espace vectoriel E_n	43
EFTIMIE I. GRECU: Espaces riemanniens V_2 à connexion linéaire localement euclidiens	73
STERE IANUȘ: Sur les distributions parallèles sur les variétés à connexion affine	81
RADU IORDĂNESCU: L'étude de la réductibilité des opérateurs infinitésimaux associés aux algèbres de Jordan simples	83
LILIANA MAXIM: Sur la géométrie des prolongements des espaces fibrés Banach	100
N. MIHĂILEANU: Sur les espaces d'Einstein centrales symétrique	101
TIBERIU POSTELNICU: Applicazioni di curva discriminativa ad alcune carte di controllo	105
P. STAVRE: Some Properties of the Connection	113
ION D. TEODORESCU, I. NEDIȚĂ et LIVIU NICOLESCU: Les espaces localement euclidiens A_2 à caractéristiques droites parallèles de la deuxième espèce	127
P. P. TEODORESCU: Tendances de développement dans la théorie de l'élasticité	152
M. TZARINA: Sur le groupe homogène d'holonomie des espaces projectivement euclidiens	153
IZU VAISMAN: Sur les transformations infinitésimales feuilletées conformes d'une variété riemannienne feuilletée	169
T. WESZELY: Sur les vecteurs tangents aux variétés fermées définies sur sphères	171

SOMMARIO

1	1. INTRODUZIONE
2	2. MATERIALI E METODI
3	3. RISULTATI
4	4. CONCLUSIONI
5	5. RINGRAZIAMENTI
6	6. BIBLIOGRAFIA
7	7. RIASSUNTO
8	8. SUMMARY
9	9. APPENDICE
10	10. TAVOLE
11	11. INDICE
12	12. ALFABETICO
13	13. SINTESI
14	14. ANALISI
15	15. SINTESI
16	16. ANALISI
17	17. SINTESI
18	18. ANALISI
19	19. SINTESI
20	20. ANALISI
21	21. SINTESI
22	22. ANALISI
23	23. SINTESI
24	24. ANALISI
25	25. SINTESI
26	26. ANALISI
27	27. SINTESI
28	28. ANALISI
29	29. SINTESI
30	30. ANALISI
31	31. SINTESI
32	32. ANALISI
33	33. SINTESI
34	34. ANALISI
35	35. SINTESI
36	36. ANALISI
37	37. SINTESI
38	38. ANALISI
39	39. SINTESI
40	40. ANALISI
41	41. SINTESI
42	42. ANALISI
43	43. SINTESI
44	44. ANALISI
45	45. SINTESI
46	46. ANALISI
47	47. SINTESI
48	48. ANALISI
49	49. SINTESI
50	50. ANALISI
51	51. SINTESI
52	52. ANALISI
53	53. SINTESI
54	54. ANALISI
55	55. SINTESI
56	56. ANALISI
57	57. SINTESI
58	58. ANALISI
59	59. SINTESI
60	60. ANALISI
61	61. SINTESI
62	62. ANALISI
63	63. SINTESI
64	64. ANALISI
65	65. SINTESI
66	66. ANALISI
67	67. SINTESI
68	68. ANALISI
69	69. SINTESI
70	70. ANALISI
71	71. SINTESI
72	72. ANALISI
73	73. SINTESI
74	74. ANALISI
75	75. SINTESI
76	76. ANALISI
77	77. SINTESI
78	78. ANALISI
79	79. SINTESI
80	80. ANALISI
81	81. SINTESI
82	82. ANALISI
83	83. SINTESI
84	84. ANALISI
85	85. SINTESI
86	86. ANALISI
87	87. SINTESI
88	88. ANALISI
89	89. SINTESI
90	90. ANALISI
91	91. SINTESI
92	92. ANALISI
93	93. SINTESI
94	94. ANALISI
95	95. SINTESI
96	96. ANALISI
97	97. SINTESI
98	98. ANALISI
99	99. SINTESI
100	100. ANALISI



ACADEMICIAN PROFESOR GHEORGHE VRĂNCEANU LA 70 DE ANI

La 30 iunie 1970 se împlinesc 70 de ani de la nașterea prof. dr. docent Gheorghe Vrănceanu, membru al Academiei Republicii Socialiste România, profesor la Universitatea din București.

Acad. G. Vrănceanu s-a născut în Valea Hogii-Vaslui, unde a urmat școala primară; a urmat liceul la Vaslui. În 1922 își ia licența în matematică la Iași și în 1924 își susține teza de doctorat la Roma, cu Tullio Levi-Civita, în fața unei comisii prezidată de Vito Volterra. Această teză tratează despre stabilitatea rostogolirii unui disc, problemă din aprofundarea căreia a fost condus la studiul geometric al cazului neolonom.

În anul 1921, când era încă student, Acad. G. Vrănceanu a fost numit preparator la Universitatea din Iași, la catedra profesorului S. Sanielevici, fiind avansat repede asistent în 1922, conferențiar în 1926, profesor în 1929. A predat cursuri de algebră superioară la Iași, geometrie analitică, geometrie superioară, analiză și mecanică la Cernăuți; în 1939 a fost transferat la Universitatea din București, ca succesor al lui Gh. Țițeica, unde a predat cursuri de geometrie analitică, diferențială, capitole speciale de geometrie diferențială și teoria relativității. Rodnica sa activitate didactică a fost împletită cu anii de studii suplimentare de la universitățile din Roma, Harvard, Princeton și apoi cu numeroasele conferințe ținute în foarte multe țări.

În 1955 a fost ales membru titular al Academiei R. S. România, după ce a activat mai mulți ani ca membru corespondent. Din 1964 este președintele Secției de matematică a Academiei, desfășurând și în cadrul Institutului de matematică al Academiei o bogată activitate de îndrumare. Este doctor honoris causa al universităților din Iași și Bologna. De asemenea, este membru al Academiei „Peloritana dei Pericolanti” din Messina și membru corespondent al Academiei regale flamande din Bruxelles.

Este laureat al Premiului de Stat și decorat cu Ordinul Muncii.

În afara activității sale didactice și științifice, a desfășurat o bogată activitate pe linie social culturală. Urmînd exemplul profesorului său Al. Myller, Acad. G. Vrănceanu a reorganizat Biblioteca Facultății de matematică-mecanică din București, a organizat conferințe și consfătuiri de geometrie, a publicat numeroase note de istorie matematică și prezentări ale activității matematicienilor români, a ținut conferințe și a publicat lucrări de informare în cadrul Societății de științe matematice, a activat în conducerea Societății pentru răspîndirea științei și culturii.

Opera matematică a Academicianului Vrănceanu însumează peste 200 de lucrări publicate și îmbrățișează aproape toate ramurile geometriei diferențiale moderne, creînd unele teorii importante și aducînd contribuții esențiale în numeroase probleme fundamentale. Spațiul nu permite decît o enumerare succintă a domeniilor mai reprezentative: spații neolomome, calculul diferențial absolut al congruențelor, studiul geometric al sistemelor de ecuații diferențiale lineare și cu derivate parțiale de al doilea ordin, teoria unitară neolomomă, spații cu conexiune conformă, spații parțial proiective, grupuri Lie, geometrie diferențială globală, grupuri de mișcare ale spațiilor cu conexiune, spații cu conexiune local euclidiene, tensori armonici, grupuri discrete, spații riemanniene cu conexiune constantă, curbura unei varietăți diferențiabile, varietăți diferențiabile scufundate în spații euclidiene, varietăți diferențiabile pe sferă etc.

Tratatele sale didactice și de specializare: „Geometrie analitică diferențială și proiectivă“, și „Lecții de Geometrie diferențială“ în 4 volume, reeditate mereu și traduse în limbile franceză și germană sînt fundamentale prin varietatea și profunzimea coordonării problemelor.

Acad. Vrănceanu a creat o școală de geometrie diferențială, în care s-au format numeroși matematicieni români, care au dezvoltat ideile sale fecunde în cele mai importante domenii ale geometriei diferențiale. Lucrările sale sînt foarte apreciate pe plan internațional, contribuind la creșterea prestigiului țării noastre și în această direcție.

La 70 de ani, Acad. G. Vrănceanu este un cercetător activ și un îndrumător atent al tinerilor matematicieni, bucurîndu-se de stima colegilor, de respectul elevilor săi și de simpatia tuturor celor care îl cunosc, atît pentru activitatea pe care o depune cît și pentru latura profund umană a caracterului său.

ON A TRANSFORMATION FORMULA FOR THE MODULE OF SURFACE FAMILIES

CABIRIA ANDREIAN CAZACU

§ 1

The purpose of the first part of this note is to give another proof of the transformation formula established in [1] for the module with weight of some surface (in particular curve) families, and in this way to extend the applicability of this formula.

Let G be a domain in $\mathbf{R}^n$, $\{C\}$ a family of q -dimensional surfaces $C \subset G$, $q = 1, 2, \dots, n-1$, *) m a positive number and π a function defined n -a.e. **) in G , positive, finite and measurable. We shall denote by $\mathfrak{A}(C)$ the family of functions ρ defined in G , non-negative and measurable, such that on every surface C on which the measure and the integral are defined, $\int_C \rho^q d\sigma_q \geq 1$, where $d\sigma_q$ designates the q -dimensional surface element on C ***).

The m -module with the weight π of the family $\{C\}$ is by definition

$$M_{\pi, m}(C) = \inf_{\rho \in \mathfrak{A}(C)} A_{\rho; \pi, m}(G), \quad (1)$$

where

$$A_{\rho; \pi, m}(G) = \int_G \pi \rho^m d\sigma_n$$

and $d\sigma_n$ is the n -dimensional volume element in $\mathbf{R}^n$.

We prefer to work in the following with the module instead of the extremal length $l_{\pi, m}(C) = M_{\pi, m}^{-1}(C)$. The index m or π will be dropped, if $m = n$ and $\pi = 1$ respectively.

*) The case $q = 1$ corresponds to a curve family.

**) The measure and the integral will be taken in Lebesgue's sense.

***) This definition is equivalent to that used in [1]. We admit here functions ρ which are equal to $+\infty$ on a set of positive n -measure, but renounce to the condition $A_{\rho; \pi, m}(G) < +\infty$.

As in [1] the family of sense-preserving homeomorphisms $f: G \rightarrow G^*$, G^* — domain in $\mathbf{R}^n$, which we shall consider, will satisfy the following conditions:

α) f is differentiable n -a.e. in G .

β) f is l. *) bi-measurable in G .

Therefore n -a. every point $x \in G$ is a regular point for f , i.e. f is differentiable at x and its Jacobian $J_n(x) \neq 0$. Suppose that through a regular point x passes a surface C and that this surface has a tangent q -plane Π at x . The restriction of f to C or to Π is also differentiable at x and if we write $C^* = f(C)$, $x^* = f(x)$, $d\sigma_q$ and $d\sigma_q^*$ the q -dimensional surface elements of C at x and of C^* at x^* respectively, then

$$J_q(x) = \frac{d\sigma_q^*}{d\sigma_q}$$

will be different from 0 and $+\infty$. We shall denote by

$$d_{f, C, m}(x) = \frac{J_q^{m/q}(x)}{J_n(x)} \quad (2)$$

and by $d_{f, C}(x) = d_{f, C, n}(x)$. If no ambiguity may occur, we shall drop the indices f , C and m . We gave the geometric interpretation of d in [1], 5, and we remark that a similar interpretation was obtained by R. Nevanlinna in the special case of a sphere family for $q = n-1$ and $m = n$, [3].

In the paper [1] we considered families of q -dimensional surfaces (depending on a parameter η , which runs through a domain in $\mathbf{R}^{n-q}$) and established for the module with weight of such a family an integral formula, from which we obtained immediately the following transformation formula

$$M_{\pi^*, m}(C^*) = M_{\pi^{d-1}, m}(C), \quad (3)$$

where π^* is a weight in G^* , $\pi = \pi^* \circ f$ and $d = d_{f, C, m}$. We shall not recall in detail the conditions fulfilled by m , the family $\{C\}$ and the transformation f under which we proved (3) because they are given in [1], but we shall point out a case more general than the one considered in [1], when (3) remains valid. The proof will be based only on the module definition.

A necessary condition in order that (3) holds is given by the existence of d n -a.e. in G as a well defined function of x . Hence through n -a. every point $x \in G$ must pass one and only one q -dimensional surface C and this surface must have a tangent q -plane at x . On the other hand with the possible exception of a negligible, from the module point of view, subfamily of $\{C\}$ and $\{C^*\}$ respectively, we shall require that the transformation formula

*) The abbreviation l. means locally.

for integrals on C or C^* are valid, [1], 1. In this view we formulate the following two conditions:

1⁰ There exists a subfamily $\{C_1^*\} \subset \{C^*\}$ such that

$$M_{\pi^*, m}(C_1^*) = M_{\pi^*, m}(C^*),$$

on every $C_1 = f^{-1}(C_1^*)$ and C_1^* the measure and the integral are well defined and $f|_{C_1}$ satisfies the properties α) and β), i.e. it is q -a.e. differentiable on C_1 and l. bi-measurable (l. A.C.), such that the transformation formula for integrals on C_1 holds.

2⁰. There exists a subfamily $\{C_2\} \subset \{C\}$ such that

$$M_{\pi^{d-1}, m}(C_2) = M_{\pi^{d-1}, m}(C)$$

and $\{C_2\}$ has all the other properties of $\{C_1\}$ in 1⁰.

Theorem 1. Suppose that f is a sense-preserving homeomorphism $G \rightarrow G^*$ with the properties α) and β), that m is a positive number, π a n -a.e. defined, positive, finite and measurable function in G , $\pi^* = \pi \circ f^{-1}$ and $\{C\}$ a q -dimensional surface family in G , such that through n -a.e. point $x \in G$ passes one and only one surface from the family $\{C\}$, and $d = d_{f, C, m}(x)$ is defined n -a.e. in G , positive, finite and measurable.

1) If we assume 1⁰, then

$$M_{\pi^*, m}(C^*) \leq M_{\pi^{d-1}, m}(C). \quad (4)$$

2) If both conditions 1⁰ and 2⁰ are fulfilled, then the transformation formula (3) holds.

1) Indeed, for every $\rho \in \mathfrak{M}(C)$ set

$$\rho^* = \begin{cases} (\rho J_q^{-1/q}) \circ f^{-1} & \text{provided } 0 < J_q < +\infty \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5)$$

It follows that $\rho^* \in \mathfrak{M}(C_1^*)$ since either $\int_{C_1^*} \rho^* d\sigma_q^* = +\infty$ or this integral is finite and the transformation formula for integrals gives

$$\int_{C_1^*} \rho^* d\sigma_q^* = \int_{C_1} \rho d\sigma_q \geq 1. \quad (6)$$

Similarly, one proves that

$$A_{\rho^*, \pi^*, m}(G^*) = A_{\rho, \pi^{d-1}, m}(G). \quad (7)$$

Therefore

$$M_{\pi^*, m}(C^*) = M_{\pi^*, m}(C_1^*) \leq \inf_{\rho \in \mathfrak{M}(C)} A_{\rho, \pi^{d-1}, m}(G) = M_{\pi^{d-1}, m}(C). \quad (8)$$

2) In the hypothesis that both conditions 1^0 and 2^0 are fulfilled we have the inequality (4) and applying the result 1) for the mapping f^{-1} , the family $\{C\}$ instead of $\{C^*\}$ and the weight πd^{-1} , one obtains

$$M_{\pi d^{-1}, m}(C) \leq M_{\pi^*, m}(C^*), \quad (9)$$

since $d_{f^{-1}, C^*, m}(x^*) = d_f^{-1}, C, m(x)$ n -a.e. in G^* , $d = d_{f, C, m}$ and

$$[(\pi d^{-1}) \circ f^{-1}] d_{f^{-1}, C^*, m} = \pi^* \text{ } n\text{-a.e. in } G^*.$$

Taking into account that $M_{\pi, m}(C) = 0$ for every π and m , if the family $\{C\}$ lies in a subset of G with the n -measure 0, Theorem 1 implies immediately the

Consequence 1. Suppose that f is a sense-preserving homeomorphism: $G \rightarrow G^*$ with the properties $\alpha)$ and $\beta)$, that m , π and π^* are defined as in Theorem 1, and $\{C\}$ is a q -dimensional surface family in G such that:

- through n -a. every point $x \in G$ passes one and only one surface C and
- with the possible exception of a subfamily of $\{C\}$ lying in a subset of G with the n -measure 0, on each surface C and on its image C^* the measure and the integral are defined, and $f|_C$ has the properties $\alpha)$ and $\beta)$ on C , such that the transformation formula for integrals on C holds. Then (3) holds.

This is in particular the case of the families considered in [1].

Consequence 2. (A monotony principle) Let $f_k: G \rightarrow f_k(G)$, $k = 1, 2$, two sense-preserving homeomorphisms, m , π and $\{C\}$ such that the transformation formula (3) holds:

$$M_{\pi_k^*, m}(C_k^*) = M_{\pi d_k^{-1}, m}(C), \quad (10)$$

where $C_k^* = f_k(C)$, $\pi_k^* = \pi \circ f_k^{-1}$ and $d_k = d_{f_k, C, m}$. If

$$d_1(x) \leq d_2(x) \quad (11)$$

n -a.e. in G , then

$$M_{\pi_1^*, m}(C_1^*) \geq M_{\pi_2^*, m}(C_2^*). \quad (12)$$

§ 2

In the second part of this note we shall renounce to the hypothesis that only one surface of the family $\{C\}$ passes through n -a. every point in G . Then instead of (3) we shall obtain only some inequalities which generalize results in [2].

Theorem 2. Suppose again $f: G \rightarrow G^*$ a sense-preserving homeomorphism with the properties $\alpha)$ and $\beta)$, m , π , and π^* as in Theorem 1, and $\{C\}$ a q -dimensional surface family in G .

1) If there exists a function $d_0(x)$ defined n -a.e. in G , finite, positive and measurable, and a subfamily $\{C_1^*\} \subset \{C^*\}$ as in the condition 1^0 , such that for

every C_1 , q -a.e. on the subset of C_1 where $d_{f, C_1, m}(x)$ is defined, finite and positive,

$$d_{f, C_1, m}(x) \geq d_0(x). \quad (12)$$

Then

$$M_{\pi^*, m}(C^*) \leq M_{\pi d_0^{-1}, m}(C). \quad (13)$$

2) Similarly, suppose that there exists a function $d^0(x)$ defined n -a.e. in G , finite, positive and measurable, and a subfamily $\{C_2\} \subset \{C\}$ such that

$$M_{\pi(d^0)^{-1}, m}(C_2) = M_{\pi(d^0)^{-1}, m}(C),$$

$\{C_2\}$ has all the other properties of $\{C_1\}$ in 1^0 and for each C_2 q -a.e. on the subset of C_2 where $d_{f, C_2, m}$ is defined, finite and positive,

$$d_{f, C_2, m}(x) \leq d^0(x). \quad (14)$$

Then

$$M_{\pi^*, m}(C^*) \geq M_{\pi(d^0)^{-1}, m}(C). \quad (15)$$

1) We apply the same argument as in the proof of Theorem 1. 1), taking in this case

$$\rho^* = \begin{cases} \left[\rho \left(d_0 J_n \right)^{-1/m} \right] \circ f^{-1} & \text{provided } 0 < d_0 J_n < +\infty \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

instead of (5).

Firstly one sees that $\rho \in \mathfrak{A}(C)$ implies $\rho^* \in \mathfrak{A}(C_1^*)$. This is evident if $\int_{C_1^*} \rho^* d\sigma_q^* = +\infty$. Otherwise, the definition (16) of ρ^* shows that the inequalities $0 < d_0 J_n < +\infty$ and $\rho < +\infty$ hold q -a.e. on the considered C_1 ; but then $d_{f, C_1, m}$ exists and $0 < d_{f, C_1, m} < +\infty$ q -a.e. on this C_1 , whence (12) holds q -a.e. on C_1 ; therefore $\int_{C_1^*} \rho^* d\sigma_q^* \geq \int_{C_1} \rho d\sigma_q \geq 1$.

After proving (7) with d_0 instead of d , one obtains the sequence of relations (8), again with d_0 instead of d , and therefore (13).

2) Taking into account that $d_{f^{-1}, C^*, m}(x^*) = d_{f^{-1}, C, m}(x)$ as soon as $d_{f, C, m}$ exists, in order to obtain (15) it suffices to apply 1) to f^{-1} , $\{C\}$ and $\pi(d^0)^{-1}$.

Consequence 3. Let $f: G \rightarrow G^*$ be a sense-preserving homeomorphism with the properties $\alpha)$ and $\beta)$, and m, π, π^*, d_0 and d^0 as in Theorem 2.

Suppose that $\{C\}$ is a q -dimensional surface family in G such that with the possible exception of a subfamily of surfaces $\{C_0\} \subset \{C\}$, lying in a subset of G with the n -measure 0, on every C and C^* the measure and the integral are well defined and $f|_C$ satisfies the properties $\alpha)$ and $\beta)$, and the transformation formula for integrals.

If for each $C \notin \{C_0\}$ q-a.e. on the subset of C where $d_{f,C,m}$ is defined, finite and positive,

$d_{f,C,m}(x) \geq d_0(x)$, or $d_{f,C,m}(x) \leq d^0(x)$ respectively, then (13), or (15) respectively, holds.

Consequence 4. Assume that d_0 , or d^0 respectively, in Theorem 2 (in particular, in Consequence 3) is a constant. Then we have

$$M_{\pi^*, m}(C^*) \leq d_0^{-1} M_{\pi, m}(C) \text{ and } M_{\pi^*, m}(C^*) \geq (d^0)^{-1} M_{\pi, m}(C) \quad (17)$$

respectively.

Special cases of Consequence 4.

1. If one adds the hypothesis that f is K -quasiconformal, one can take

$$d^0 = K^{n-q} \text{ and } d_0 = K^{-(n-q)}, [1], \quad 6.2.$$

It results from (17)

$$K^{-(n-q)} M_{\pi, m}(C) \leq M_{\pi^*, m}(C^*) \leq K^{n-q} M_{\pi, m}(C).$$

2. Setting $d_0 = 1$ or $d^0 = 1$, one obtains a direct generalization of the extremal length principle in [2]: Under the conditions of Theorem 2 (or Consequence 3) if q-a.e. on each non-exceptional C

$$d_{f,C,m} \geq 1 \text{ or } \leq 1 \text{ respectively,}$$

then

$$M_{\pi^*, m}(C^*) \leq M_{\pi, m}(C) \text{ or } \geq M_{\pi, m}(C) \text{ respectively.}$$

("Non-exceptional" means here $C \in \{C_1\}$ or $\{C_2\}$ in the case of Theorem 2 and $C \notin \{C_0\}$ in the case of Consequence 3).

Evidently, the results of this paper remain true if one renounces to the hypotheses f is sense-preserving and G is connected.

REFERENCES

1. C. Andreian Cazacu, *Module of surface families*, Revue Roum. de Math. pures et appl., XV, 9, 1970, p. 1331—1338
2. " — *Sur les transformations pseudo-analytiques*, Revue de Math. pures et appl., II, 1957, p. 383—397. 1331-1338.
3. R. Nevanlinna — *A remark on differentiable mappings*, Michigan Math. Journ 3, 1, 1955, p. 53—57.

Received on 25th VI. 1970

University of Bucharest
Faculty of mathematics-mechanics

SUR UN THÉORÈME DE DE RHAM POUR LES FIBRÉS INTÉGRABLES

M. CRAIOVEANU

On établit un théorème du type de de Rham pour la cohomologie d'une C^∞ -variété banachique, munie d'une structure presque-produit tel que l'une des distributions soit intégrable, à coefficients dans le faisceau de germes de formes feuilletées. C'est une généralisation du théorème 3 de [4].

Soit X une C^∞ -variété paracompacte du type $\mathcal{G}$ tel que tout $\mathbf{E} \in \mathcal{G}$ satisfait à la condition (PU) de [1], p. 40 avec $r = \infty$. Alors X admet des C^∞ -partitions de l'unité. D'autre part pour toute variété du type $\mathcal{G}$, pour laquelle $\mathcal{G}$ est un ensemble feuilleté (c'est-à-dire tout $\mathbf{E} \in \mathcal{G}$ peut être écrit sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{F} \times \mathbf{G}$, où $\mathbf{F} \in \mathcal{G}_1$, $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_2$; dans ce cas nous écrivons formellement $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ et qui possède une structure presque-produit correspondante, on peut considérer deux fibrés vectoriels, sous-fibrés vectoriels du fibré tangent de X , TX . Nommément, l'un qui correspond à $\mathcal{G}_1$ nommé structurel et noté par T^sX et l'autre qui correspond à $\mathcal{G}_2$ nommé transversal et noté par T^tX . Nous avons évidemment $T^sX \oplus T^tX = TX$, où avec $\oplus$ nous notons la somme de Whitney. Mais alors on peut parler dans un sens évident de formes différentielles de degré (p, q) . Localement ces formes peuvent être caractérisées de la manière suivante: si U est un ouvert de l'espace de Banach $\mathbf{E} = \mathbf{F} \times \mathbf{G}$, alors la partie principale ω d'une telle forme est donnée par le morphisme $\omega: U \rightarrow L_a^p(\mathbf{F}) \times L_a^q(\mathbf{G})$ de classe C^∞ . Si $\xi_1, \dots, \xi_q$ (resp. $\eta_1, \dots, \eta_p$) sont des sections au-dessus de U du fibré $T^t\mathbf{E}|_U$ (resp. $T^s\mathbf{E}|_U$) et si sur U est donnée la forme ω de degré (p, q) , alors par $\langle \omega, \xi_1 \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle$ nous notons l'application de U dans $\mathbf{R}$ dont la valeur au point x est

$$\langle \omega(x), \xi_1(x) \times \dots \times \xi_q(x) \times \eta_1(x) \times \dots \times \eta_p(x) \rangle,$$

les parenthèses $\langle, \rangle$ désignant la valeur de $\omega(x) \in L_a^p(\mathbf{F}) \times L_a^q(\mathbf{G})$ sur les vecteurs $\xi_1(x), \dots, \xi_q(x) \in \mathbf{F}$, $\eta_1(x), \dots, \eta_p(x) \in \mathbf{G}$.

Nous supposons maintenant que le sous-fibré structurel $T^s S$ est intégrable, c'est-à-dire qu'il définit une structure feuilletée sur X . Pour toute forme ω de degré (p, q) sur X , il y a une forme $d'\omega$ de degré $(p, q+1)$ qui pour chaque ouvert U de X et pour les champs de vecteurs $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p \in C^\infty(T^s U)$, $\eta_1, \dots, \eta_p \in C(T^t U)$ prend la valeur

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \langle d'\omega, \xi_0 \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle = \\
 & = \sum_{i=0}^q (-1)^i \xi_i \langle \omega, \xi_0 \times \dots \times \hat{\xi}_i \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle + \\
 & + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle \omega, [\xi_i, \xi_j] \times \xi_0 \times \dots \times \hat{\xi}_i \times \dots \times \hat{\xi}_j \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle + \\
 & + \sum_{i=0}^q \sum_{k=1}^p (-1)^{i+k+q+1} \langle \omega, [\xi_i, \eta_k]^t \times \xi_0 \times \dots \times \hat{\xi}_i \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \hat{\eta}_k \times \dots \times \eta_p \rangle.
 \end{aligned}$$

Dans cette formule par $[\xi_i, \eta_k]^t$ nous notons la composante transversale du crochet des champs de vecteurs ξ_i, η_k .

$d'\omega$ tellement définie est une forme différentielle. En effet cette chose résulte immédiatement de la représentation locale de la formule (1): si U est un ouvert de l'espace de Banach $\mathbf{E} = \mathbf{F} \times \mathbf{G}$ et $\omega, \xi_0, \dots, \xi_q, \eta_1, \dots, \eta_p$ sont les parties principales correspondantes à la forme et aux champs de vecteurs considérés, alors dans le point $x \in U$, la formule (1) s'exprime par

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \langle (d'\omega)(x), \xi_0(x) \times \dots \times \xi_q(x) \times \eta_1(x) \times \dots \times \eta_p(x) \rangle = \\
 & = \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle \omega'(x) \xi_i(x), \xi_0(x) \times \dots \times \hat{\xi}_i(x) \times \dots \times \xi_q(x) \times \eta_1(x) \times \dots \times \eta_p(x) \rangle,
 \end{aligned}$$

où pour chaque $x \in U$, $\omega'(x): \mathbf{E} \rightarrow L_a^q(\mathbf{F}) \times L_a^p(\mathbf{G})$ est l'application linéaire continue définie par la dérivée de la fonction considérée.

En notant par $\Omega^{p,q}(X)$ l'espace des formes de degré (p, q) sur X , l'application

$$d': \Omega^{p,q}(X) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(X)$$

est un homomorphisme.

Un calcul facile montre que nous avons

$$(3) \quad d'(\omega \wedge \psi) = d'\omega \wedge \psi + (-1)^{\text{grad} \omega} \omega \wedge d'\psi$$

et

$$(4) \quad d'd'\omega = d'^2\omega = 0.$$

Nous disons qu'une forme ω est feuilletée (ou du type basique) si et seulement si elle a le degré $(p, 0)$ et vérifie la condition

$$(5) \quad d'\omega = 0.$$

Une autre propriété importante de l'opérateur d' est qu'il vérifie un lemme de Poincaré, c'est-à-dire on a le

LEMME. Soit ω une forme de degré (p, q) ($q \geq 1$) définie sur un voisinage ouvert étoilé U du $\mathbf{E}$. Si $d'\omega = 0$, il existe alors une forme ψ de degré $(p, q-1)$ sur U telle que

$$d'\psi = \omega.$$

Pour la démonstration nous construirons une application

$$\kappa' : \Omega^{p, q}(U) \rightarrow \Omega^{p, q-1}(U) \quad (q \geq 1)$$

telle que

$$d'\kappa' + \kappa'd' = id,$$

et en prenant alors $\psi = \kappa'\omega$ il suit que $d'\psi = \omega$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que l'élément neutre de $\mathbf{E}$ appartient au voisinage U . Pour la forme ω de degré (p, q) nous définissons $\kappa'\omega$ par la formule

$$\begin{aligned} & \langle (\kappa'\omega)(x), \xi_1 \times \dots \times \xi_{q-1} \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle = \\ & = \int_0^1 t^{q-1} \langle \omega(tx), x_F + \xi_1 \times \dots \times \xi_{q-1} \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle dt, \end{aligned}$$

dans laquelle nous pouvons considérer qu'interviennent les parties principales et que $\xi_i \in \mathbf{F}$ ($i = 1, \dots, q-1$), $\eta_a \in \mathbf{G}$ ($a = 1, \dots, p$). Ici par x_F nous avons noté la composante de l'élément $x \in U$ qui correspond à l'espace de Banach $\mathbf{F}$.

Un calcul simple conduit à

$$\begin{aligned} & \langle (d'\kappa'\omega + \kappa'd'\omega)(x), \xi_1 \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle = \\ & = \int_0^1 qt^{q-1} \langle \omega(tx), \xi_1 \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle dt + \\ & + \int_0^1 t^q \langle \omega'(tx)x, \xi_1 \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle dt = \\ & = \int_0^1 (\langle t^q \omega(tx), \xi_1 \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle) \cdot dt = \\ & = \langle \omega(x), \xi_1 \times \dots \times \xi_q \times \eta_1 \times \dots \times \eta_p \rangle, \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.



Nous notons maintenant par $\overline{\Omega}^{p,q}$ le faisceau de germes de formes différentielles de degré (p, q) sur X et par Φ^p le faisceau de germes de formes différentielles feuilletées de degré p sur X . Nous considérons la suite de faisceaux

$$(6) \quad 0 \rightarrow \Phi^p \xrightarrow{i} \overline{\Omega}^{p,0} \xrightarrow{d'} \overline{\Omega}^{p,1} \xrightarrow{d'} \dots \xrightarrow{d'} \overline{\Omega}^{p,q} \xrightarrow{d'} \dots,$$

où i est l'injection canonique et d' sont les homomorphismes canoniques définis par l'opérateur d' de plus haut.

En vertu de la définition des formes feuilletées, c'est-à-dire de (5), de la propriété (4) et du lemme, cette suite est exacte. L'existence des partitions de l'unité sur X nous assure que les faisceaux $\overline{\Omega}^{p,q}$ sont fins; il suit que la résolution (6) est une résolution fine de Φ^p donc, en notant par $Z^{p,q}(X)$ l'espace des formes de degré (p, q) , d' -fermées sur X , nous obtenons le théorème suivant du type de de Rham

Théorème

$$H^q(X, \Phi^p) = Z^{p,q}(X) / d' \Omega^{p,q-1}(X).$$

En particulier nous avons

$$H^q(X, \Phi) = Z^{0,q}(X) / d' \Omega^{0,q-1}(X),$$

Φ notant ici le faisceau de germes de fonctions différentiables feuilletées (constantes sur des feuilles).

Enfin nous faisons la remarque suivante.

En notant par C le complexe des formes différentielles réelles sur X , on peut montrer qu'alors C est un complexe double semipositif dans le sens de [6]. A cause du théorème de de Rham pour les variétés banachiques [2] et du théorème précédent nous avons

$$H^r(C) \cong H^r(X, \mathbf{R}), H^r(\Omega^p) \cong H^r(X, \Phi^p), H^r(\Omega) \cong H^r(X, \Phi),$$

où $\mathbf{R}$ est le corps réel, $\Omega^p = \bigoplus_2 \Omega^{p,q}$ et $\Omega^0 = \Omega$. L'inclusion de $\mathbf{R}$ dans Φ induit les homomorphismes

$$p^r : H^r(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^r(X, \Phi).$$

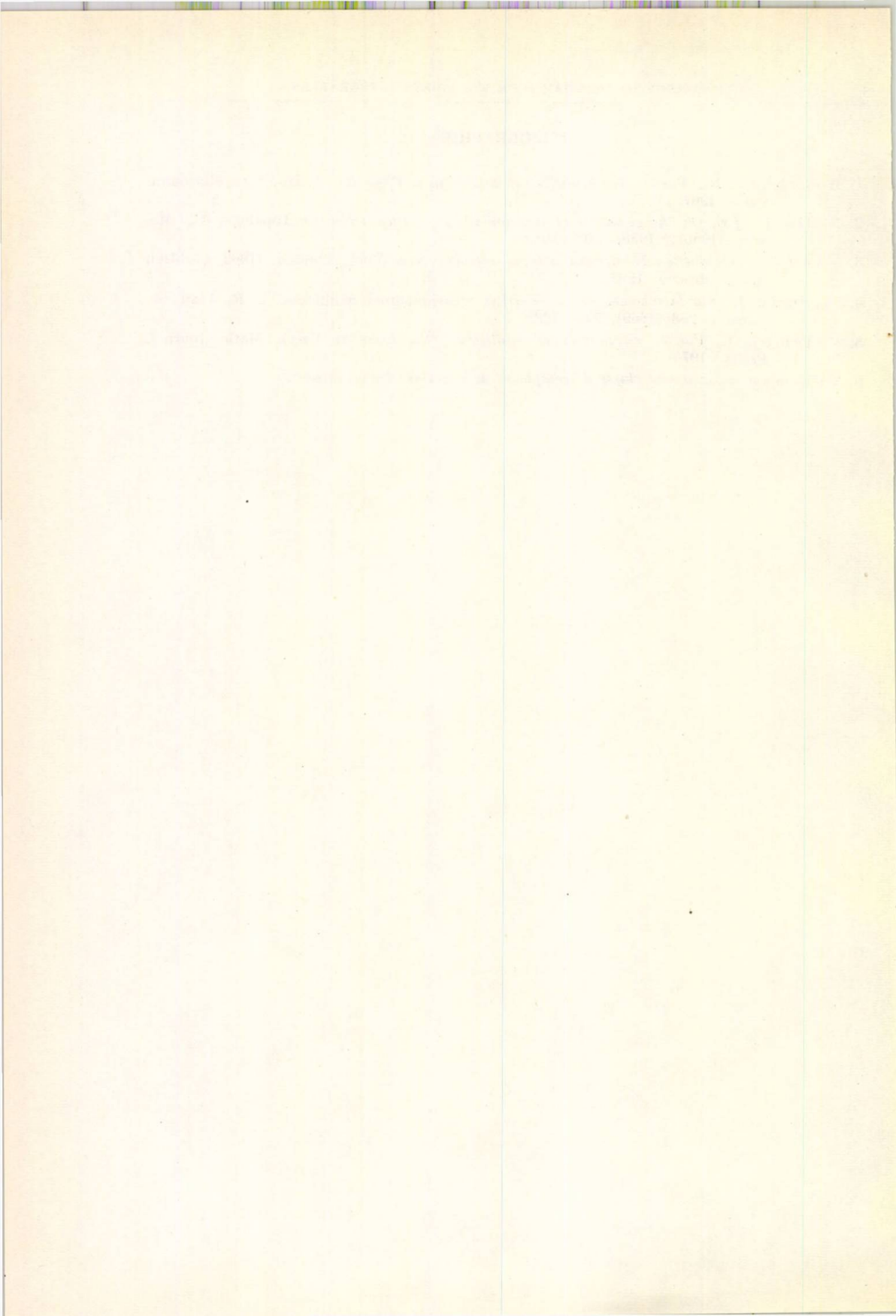
Les théorèmes 1 et 2 de [6] donnent alors des conditions suffisantes pour que ces homomorphismes soient des isomorphismes.

Séminaire Mathématique „A. Myller“
Université „Al. I. Cuza“,
Jassy
R. S. de Roumanie

Reçu le mai 1970

BIBLIOGRAPHIE

1. B o u r b a k i. N., *Variété différentielles et analytiques*. Fascicule de résultats. Hermann, Paris, 1967.
2. E e l l s J., Jr., *On the geometry of function spaces*, Symp. Inter. de Topologia Alg. Mexico (1956); 1958, 303—308.
3. L a n g S., *Introduction to differentiable manifolds*, New York, London, (1962) (Édition russe, Moscou 1967).
4. V a i s m a n I., *Sur la cohomologie des variétés riemanniennes feuilletées*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268 (1969), 720—723.
5. V a i s m a n I., *Varétés riemanniennes feuilletées*. (Va apare în Czech. Math. Journal, Praha, 1970).
6. V a i s m a n I., *Sur une classe de complexes de cochaînes* (Sous presse).



SOME ASPECTS OF THE PROBLEM OF DEFECTIVE IN A BATCH

V. CRAIU, D. V. ILIESCU and V. GH. VODĂ

Some results concerning the allowable number of bad items in a lot are presented from a probabilistic point of view.

1. Introduction

In any production process there is produced a number of items which are not in accordance with some criteria given before. They are so-called "bad-items" — that is defectives outgoing from a manufacturing operation.

It is clear that in such manufacturing operation, the number of defectives must not go beyond a certain fixed number since if the converse situation occurs, the production process meets failure.

We set ourselves the task of studying the problem of greatest allowable number of defectives in a batch, produced by a continuous (or not) production line. This will be made from a probabilistic point of view.

The problem can be interpreted in terms of the expected costs which we can associate with the greatest admissible number of bad items in a lot. One can proceed therefore to minimize the considered cost.

Since the occurrence of defective in a batch is a random phenomenon, the natural way of investigation is that of studying the probabilities of producing defective items.

We suppose firstly that an item being bad does not depend on previous defects in the batch.

Let us formulate now the problem: consider a production line which provides a lot of size $N = n + d$ where n is the number of good items and d is the number of defectives.

By $P(x|N)$ we denote the probability of producing x bad items in a batch of size N .

The total expected cost $g(d)$ concerning the allowable number of defectives is:

$$g(d) = g_1 \sum_{x=d+1}^N P(x | N) + g_2 \sum_{x=0}^d (d - x) P(x | N)$$

where g_1 and g_2 are the unit costs associated respectively with the producing of a bad and a good item.

This cost model was studied by Bowman and Fetter and latter by Levitan who processed some results of Gifler.

We are interested here in some probabilistic aspects of the problem that is in expression of the from $P(x | N)$ defined some lines ago.

We shall develop also the scheme of Levitan to the case of dependent trials since in a manufacturing operation is possible to have the situation when a defect is generated by the another one.

2. The sample description space

The shall begin with the formulation of backgrounds of our problem.

Let us denote by S the sample description space of the phenomenon of producing defectives.

Generally speaking, the sample description space of a random phenomenon is the space of description of all possible outcomes of the considered phenomenon.

Consider on this space a probability function $P(\cdot)$ and suppose that each description in S in an n -tuple.

In this situation, the random phenomenon of producing defectives which S describes, is defined like a sequence of n trials. (that is it consists of n trials).

Let A be an event on S . We are saying A is dependent of j^{th} trial if the appartition or non-appartition of the event A is function only of the outcome of the j^{th} trial.

In other words we can state that an event A depends on the j^{th} trial if the decision as to whether a given description on S belongs to the event, depends only on the j^{th} component of the description.

We can illustrate these, by giving an example based on the urn model.

Consider a discrete batch from which we extract a sample of size two. We can have one of the four possibilities (g, g) , (g, b) , (b, g) , (b, b) where "g" represents a good item and "b" a bad one.

The event A that the first item selected be a good one, depends on the first trial. Analogously, the event B that the second item drawn be also a good one is depending on the second trial.

But we must especially note that to have exactly one item of the items selected being of a specified quality does not depend on any one of

the trials. In our situation if we let C to stand as the event that exactly one of the items drawn to be a good one, we can write:

$$C = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

3. Independent trials and combinatorial product events

Consider again the sample description space S defined as consisting of n trials. Let $\{E_j\}_{j=1, 2, \dots, n}$ be the family of all events on S which are depending on the j^{th} trial.

We shall say that the n trials are independent if the families $E_1, E_2, \dots, E_n$ are independent ones, that is as it is well-known the below relation holds:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n E_j\right) = \prod_{j=1}^n P(E_j),$$

for every set of events E_j , $j = 1, 2, \dots, n$ in a such way that for $j = 1, \dots, n$, E_j is depend only on the j^{th} trial.

The notion of independent trials plays an important rôle in many practical problems and its intuitive meaning can be resumed like below: two trials are independent if the outcome of one does not change (or influence in a certain way) the outcome of the other.

Consider now a family of n sample description spaces $\{S_j\}_{1 \leq j \leq n}$ on which are defined a family of probability functions $\{P_j\}_{1 \leq j \leq n}$.

Let us assume now that we observe n successive random experiments whose sample description spaces are exactly:

$$\{S_j\}_{1 \leq j \leq n}$$

The total sample description space of these experiments is consisting of n -tuples $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ which we can form by taking for s_j any element of S_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

It is customary to write:

$$S = S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_n = \bigotimes_{j=1}^n S_j$$

and to express that S is the combinatorial product of the spaces

$$S_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Consider now for every event A_j on S_j ($j = 1, \dots, n$)

the combinatorial product event

$$A = \bigotimes_{j=1}^n A_j$$

that is the set of all n -tuples $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ which we can form by taking for s_j any component A_j .

A probability function $P(\cdot)$ being defined on S , we put:

$$P(A) = \prod_{j=1}^n P_j(A_j) \text{ for every } A_j \text{ on } S_j \quad (\alpha)$$

For practical purposes it is assumed that every sample description space has a finite size. Let us denote by:

$$S_j = \{D_1^{(j)}, D_2^{(j)}, \dots, D_{N_j}^{(j)}\},$$

the description in S ; where N_j represents the size of S_j .

A description in $S = \bigotimes_{j=1}^n S_j$ can be exposed as:

$$\{D_{i_1}^{(1)}, D_{i_2}^{(2)}, \dots, D_{i_n}^{(n)}\} \text{ where } j = 1, \dots, n; i_j = 1, \dots, N_j.$$

If we give probability functions $P_j(\cdot)$ ($j = 1, \dots, n$) on S_j we define $P(\cdot)$ on S by writing:

$$P(\{D_{i_1}^{(1)}, D_{i_2}^{(2)}, \dots, D_{i_n}^{(n)}\}) = \prod_{j=1}^n P_j(\{D_{i_j}^{(j)}\})$$

The above relation is a particular case of (1) as an event on S can be exposed like a combinatorial product event:

$$\{D_{i_1}^{(1)}, D_{i_2}^{(2)}, \dots, D_{i_n}^{(n)}\} = \{D_{i_1}^{(1)}\} \otimes \dots \otimes \{D_{i_n}^{(n)}\}$$

The probability space which consists of the sample description space $S = \bigotimes_{i=1}^x S_i$ on which is defined a probability function $P(\cdot)$ by the relation (α) , consists of n independent trials.

4. Bernoulli trials.

An important case in many production problems which involve independent trials is that of so-called Bernoulli trials. This is the case which concerns and our problem since we are face to a situation in which we need to classify a set of items into two categories: good and bad ones.

Such an experiment whose outcomes are only of two types is generally known as a Bernoulli trial.

In our construction the sample description space of a Bernoulli trials is $S = \{g, b\}$ on which is defined a probability function $P_s(\cdot)$ satisfying: $P_s(\{g\}) = p$ and $P_s(\{b\}) = q$ with $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$ that is p and q are assigned probabilities to produce a good or a bad item.

5. Binomial generalised distribution

A more realistic model of production than the Bernoulli case is that in which the outcome of any one trial is independent of the outcome of any other but the probabilities associated to defectives vary from trial to trial. A relevant example can be given as follows: tool wear and slight changes in machine settings change in a course of a run, and this implies an increasing of probability of defectives somewhat as item are produced.

This situation is well-described by so-called binominal generalized distribution. (see Firescu and Mihoc [4])

Consider N independent random variables $f_1, f_2, \dots, f_N$ each one being assigned with two values: 1 or 0 so that

$$P(\{s: f_j(s) = 1\}) = p_j, P(\{s: f_j(s) = 0\}) = 1 - p_j = q_j, 1 \leq j \leq N$$

If $p_j = p$ for all j it is easy to see that the random variable

$$\xi_N = f_1 + \dots + f_N$$

has the classical binomial distribution. In the general case the distribution of ξ_N is called "Poisson's binomial generalized distribution".

If we let p_j stands as the probability of j^{th} item being defective, the probability $P(x|N)$ -that is of x defective items in a batch of size N is given by the coefficients of t^x in the polynomial:

$$u(t) = (p_1 t + q_1) (p_2 t + q_2) \dots (p_N t + q_N)$$

where $p_j + q_j = 1$ for all j .

Consider now the characteristic function of the above distribution:

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^N (p_j e^{ti} + q_j)$$

The first two moments are:

$$M_1 = \frac{1}{i} \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^N p_j$$

$$M_2 = \frac{1}{i^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^N (p_j^2 + p_j q_j) + 2 \sum_{j \neq k} p_j p_k$$

We obtain immediately:

$$\sigma^2 = M_2 - M_1^2 = \sum_{j=1}^N p_j q_j$$

Let us put $p = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j$ and let us observe that:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (p_j - p)^2 &= \sum_{j=1}^N p_j^2 - 2p \sum_{j=1}^N p_j + \sum_{j=1}^N p^2 = \sum_{j=1}^N p_j^2 - 2Np^2 + Np^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N p_j^2 - Np^2 \end{aligned}$$

In the sometime we have $\sum_{j=1}^N (q_j - q)^2 = \sum_{j=1}^N q_j^2 - Nq^2$, where $p + q = 1$. If we add the two equalities we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (p_j - p)^2 + \sum_{j=1}^N (q_j - q)^2 &= \sum_{j=1}^N p_j^2 + \sum_{j=1}^N q_j^2 - Np^2 - Nq^2 = \sum_{j=1}^N (p_j + \\ &+ q_j)^2 - 2 \sum_{j=1}^N p_j q_j - N(p + q)^2 + 2Npq = -2\sigma^2 + 2Npq \end{aligned}$$

We have therefore:

$$Npq = \sigma^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^N (p_j - p)^2 + \sum_{j=1}^N (q_j - q)^2 \right]$$

or

$$\sigma^2 \leq Npq$$

That is the variance of the generalized binomial distribution is at most variance of the associated binomial distribution. We are ready to state and prove the following:

Theorem 1: The probability of producing a given number of good tems increases with bateh size, that is:

$$\sum_{x=0}^d P(x | N) \leq \sum_{x=0}^{d+1} P(x | N + 1)$$

Proof: Consider the following equality:

$$P(x | N) = p_N P(x - 1 | N - 1) + q_N P(x | N - 1) \quad (\beta)$$

where p_j is the probability of j^{ht} item being defective. We agree that $P(x | N) = 0$ for every $x < 0$.

Changing N with $N + 1$ and summing over x we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{d+1} P(x | N + 1) &= p_{N+1} \sum_{x=0}^{d+1} P(x - 1 | N) + q_{N+1} \sum_{x=0}^{d+1} P(x | N) = \\ &= p_{N+1} \sum_{x=0}^d P(x | N) + q_{N+1} \sum_{x=0}^{d+1} P(x | N) \end{aligned}$$

The last sum we can write as follows: $\sum_{x=0}^d P(x | N) + P(d + 1 | N)$. that is we have:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{d+1} P(x | N + 1) &= p_{N+1} \sum_{x=0}^d P(x | N) + q_{N+1} \sum_{x=0}^d P(x | N) + q_{N+1} P(d + 1 | N) \\ &= (p_{N+1} + q_{N+1}) \sum_{x=0}^d P(x | N) + q_{N+1} P(d + 1 | N) = \sum_{x=0}^d P(x | N) + \\ &\quad + q_{N+1} P(d + 1 | N), \end{aligned}$$

or:

$$\sum_{x=0}^{d+1} P(x | N + 1) - \sum_{x=0}^d P(x | N) = q_{N+1} P(d + 1 | N) \geq 0$$

The theorem is proved. The relation (β) follows from the situation that a total of x bad items can occur in the first N items either through having $x - 1$ bad items in the first $N - 1$ items with the N item defective or through having N defectives in the first $N - 1$ items with the N^{th} item being a good one.

6. The equiprobable case

Consider now again the case of independent trials and denote by η_{jt} the following random variable:

$$\eta_{jt} = \begin{cases} 0 & \text{if after } t \text{ trials, } j^{\text{th}} \text{ item produced is defective} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $P_t(x_j)$ is the probability that after t trials the item x_j produced being a good one, then we have:

$$P\{\eta_{jt} = 1\} = P_t(x_j) \text{ and } P\{\eta_{jt} = 0\} = 1 - P_t(x_j), \quad j = 1, \dots, N$$

If we denote $p_x(N, t) = P\{\xi_{Nt} = x\}$ the probability that after t trials, x items produced be defective, we observe that:

$$\xi_{Nt} = \sum_{j=1}^N \eta_{jt}$$

Taking expectation we have :

$$E(\xi_{Nt}) = E\left(\sum_{j=1}^N \eta_{jt}\right) = \sum_{j=1}^N E(\eta_{jt}) = \sum_{j=1}^N P_t(x_j),$$

since

$$E(\eta_{jt}) = 0 \cdot P\{\eta_{jt} = 0\} + 1 \cdot P\{\eta_{jt} = 1\} = P(\eta_{jt} = 1) = P_t(x_j)$$

Consider now that the probabilities assigned to the occurrences of defectives are equally, that is the set of all defectives is equiprobable. In this simple situation we can give an evaluation for the mean-value of defectives.

Theorem 2. If in a production process with independent trials the set of all defectives which will occur is equiprobable, then the mean-value of the number of defectives is given by :

$$E(\xi_{Nt}) = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^t$$

Proof. : Let $x_{j_1}, \dots, x_{j_d}$ be the defectives by the process. If $p_{j_1}, \dots, p_{j_d}$ are their associated probabilities then the probability that at a certain trial one of the items $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_d}$ be produced is $p_{j_1} + \dots + p_{j_d}$.

The converse probability is $1 - (p_{j_1} + \dots + p_{j_d})$.

After t trials, probability will become :

$$[1 - (p_{j_1} + \dots + p_{j_d})]^t$$

since we consider trials independent ones.

If we take into account that the set of defectives is equiprobable, then every x_j has the probability $\frac{1}{N}$. It follows immediately that :

$$P_t(x_j) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^t$$

Since

$$E(\xi_{Nt}) = \sum_{j=1}^N P_t(x_j) \text{ we obtain:}$$

$$E(\xi_{Nt}) = \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^t = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^t < N [e^{-\frac{1}{N}}]^t = N e^{-\frac{t}{N}}$$

It follows that for a sufficiently great number of trials (t'), $E(\xi_{Nt'}) \rightarrow 0$ that is we can say that the production process touches its goal. This means that it will produce a very small quantity of bad items.

7. The stochastic case

It is a fact that until recently the application of probabilistic and statistical methods to the production process considered a more or less complicated stochastic process has not been taken into account.

Some interesting results concerning the problem of defective items belong in this connection to Vincze [7] and Tusnady [6]. Their work concerns the acceptance plans designed for a Pólya process of defective items.

Levitan [3] in his paper considers independent trial distributions as an extension of the notion of Bernoulli trials in which the outcome of any one trial is independent of the outcome of any other but the probabilities may vary from trial to trial.

However, he is not developing this idea and do not study the variation of such probabilities.

We are able to state that such a problem can be well investigated with the aid of classical learning theory since a learning process investigates a situation where there are two types of responses: good and bad ones ([8], [9]).

We shall develop this idea largely in other paper.

Let us consider now a discrete production process and let us associate to each product either number 0 or 1 in accordance with its quality to be defective or non-defective.

Denote therefore by:

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j^{\text{th}} \text{ item is a good one} \\ 0 & \text{if } j^{\text{th}} \text{ item is defective} \end{cases}$$

Let us put: $P(\xi_{j+1} = 1 \mid \xi_j = 1)$ -the probability that $(j+1)^{\text{th}}$ item be good when it is known that j^{th} item is also a good one. In the same way we must read:

$$P(\xi_{j+1} = 1 \mid \xi_j = 0), \quad P(\xi_{j+1} = 0 \mid \xi_j = 0), \quad P(\xi_{j+1} = 0 \mid \xi_j = 1)$$

Suppose that we have the following situation:

$$P(\xi_j = a \mid \xi_{j-1} = b) = P(\xi_2 = a \mid \xi_1 = b)$$

where $a = 0$ or 1 $b = 0$ or 1 for every $j \in \{2, 3, \dots\}$.

If we require that:

$$1 < P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) + P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0) < 2$$

we can show that the asymptotic probability for producing a non-defective item is given by:

$$P^\infty(\xi_j = 1) = \frac{1 - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)}{2 - P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)}$$

That is after a large number of trials, the probability of j^{th} item being non-defective is given by the above formula.

It is easy to see we have:

$$P^{(t-1)}(\xi_{j-1} = 0) + P^{(t-1)}(\xi_{j-1} = 1) = 1 \quad (1)$$

$$P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 0) + P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0) = 1 \quad (2)$$

Let us show now that:

$$\begin{aligned} P(\xi_j = 1) &= P(\xi_{j-1} = 1)P(\xi_j = 1 \mid \xi_{j-1} = 1) + \\ &+ P(\xi_{j-1} = 0)P(\xi_j = 1 \mid \xi_{j-1} = 0) \end{aligned} \quad (3)$$

using the relation:

$$P(\xi_j = 1 \mid \xi_{j-1} = 1)P(\xi_{j-1} = 1) = P(\xi_j = 1 \wedge \xi_{j-1} = 1)$$

we obtain immediately

$$\begin{aligned} P(\xi_j = 1) &= P(\xi_j = 1 \wedge \xi_{j-1} = 1) + P(\xi_j = 1 \wedge \xi_{j-1} = 0) = \\ &= P(\xi_j = 1) \wedge (\xi_{j-1} = 1 \vee \xi_{j-1} = 0) \end{aligned}$$

From (3) it follows that:

$$\begin{aligned} P^{(t)}(\xi_j = 1) &= P^{(t-1)}(\xi_j = 1)P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1)P^{(t-1)}(\xi_j = \\ &= 0)P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 0) \end{aligned}$$

and taking care about (1) and (2) we have:

$$\begin{aligned} P^{(t)}(\xi_j = 1) &= P^{(t-1)}(\xi_{j-1} = 1)P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) + [1 - P^{(t-1)}(\xi_{j-1} = \\ &= 1)][1 - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} P^{(t)}(\xi_j = 1) &= [P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) + P(\xi_2 = 0) - 1]P^{(t-1)}(\xi_{j-1} = 0) + \\ &+ [1 - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)] \end{aligned}$$

Let us prove now the following lemma:

Lemma: For the inequality $u^{(t+1)} \leq \alpha u^{(t)} + \beta$ where $t \in N$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$, we have

$$u^{(t+1)} \leq \left[u^{(1)} - \frac{\beta}{1-\alpha} \right] \alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

for every $t \in N$ every $u^{(1)}$ is the initial solution.

Proof: If we write step by step, we obtain immediately:

$$\begin{aligned} u^{(t+1)} &\leq \alpha u^{(t)} + \beta \leq \alpha(\alpha u^{(t-1)} + \beta) + \beta = \alpha^2 u^{(t-1)} + \alpha\beta + \beta \leq \\ &\leq \alpha^2(\alpha u^{(t-2)} + \beta) + \alpha\beta + \beta = \alpha^3 u^{(t-2)} + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta \leq \dots \\ &\leq \alpha^j u^{(1)} + (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{t-1})\beta = \\ &= \alpha^t u^{(1)} + \frac{1 - \alpha^t}{1 - \alpha} \beta = \left[u^{(1)} - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right] \alpha^t + \frac{\beta}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Is is clear that for the sign of equality we must not require that $\alpha > 0$. Taking into account this lemma we obtain:

$$\begin{aligned} P^{(t)}(\xi_j = 1) &= \left[P^{(1)}(\xi_j = 1) - \frac{1 - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)}{2 - P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)} \right] \times \\ &\times [P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) + P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0) - 1]^{t-1} + \\ &+ \frac{1 - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)}{2 - P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)} \end{aligned}$$

If we pass by limit and remember that

$$1 < P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) + P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0) < 2$$

we shall obtain immediately the required expression.

It is clear that after a large number of trials the probability of j^{th} item being defective is:

$$P^{(\infty)}(\xi_j = 0) = 1 - P^{(\infty)}(\xi_j = 1) = \frac{1 - P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1)}{2 - P(\xi_2 = 1 \mid \xi_1 = 1) - P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)}$$

We see that the condition $P(\xi_j = a \mid \xi_{j-1} = b) = P(\xi_2 = a \mid \xi_1 = b)$, $a = 0$ or 1 , $b = 0$, or 1 , for every $j \in \{2, 3, \dots\}$ endows our model with a markovian feature.

REFERENCES

1. E. H. Browman and R. B. Fetter, „Analysis for Production Management; Homewood, Illinois, R. D. Irwin, pp. 287—291.
2. B. Giffler: „The determination of optimum scrap allowance,, Research report IBM RC-43, Yorktown Heights, New York, 1957.
3. R. E. Levitan: „The optimum reject allowance problem,, Management Sci. vol. 6, N.2, january 1960, pp 172—187
4. G. h. Mihoc and D. Firescu: „Statistica matematică“, E. D. P., Bucharest, 1966

5. E. Parzen: „Modern Probability theory and its applications,,, John Wiley, New York, 1960
- 6 G. Tusnădy: „On the OC-function of the acceptance plan designed for a Polya process of defective items,, (in „Studies in mathematical statistics-theory and application,, Edited by K. Sarkady and I. Vincze Akadémiai Kiado, Budapest, 1968)
7. I. Vincze: „A tömeggyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszereiről, M. T. A. III. Oszt. Közl. IV, 3, 1964.
- 8.V. Gh. Vodă: „On a learning model,,, Rev. Roum. de mathématiques pures et appl. vol. XIV, 8, 1969, pp. 1213—1224.
9. V. Gh. Vodă: „On a two-decision learning scheme,, (paper presented at the international Congress in Probability theory held in Braşov Romania, September 1968).

Received on 1st VII. 1970

University of Bucharest
Faculty of mathematics - mechanics
Academy of the S. R. of Roumania
Centre of mathematical statistics

ON A MEASURABLE SPACE (I)

V. CRAIU and V. GH. VODĂ

1. Introduction : Let $(\mathcal{A}, T, \mu)$ be a measurable space. We shall suppose that the measure μ is σ -finite, that is for every $A \in \mathcal{A}$ there is a finite sequence of sets $A_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, 2, \dots$) so that $A \subset \bigcup_1^\infty A_i$ and $\mu(A_i) < +\infty$ for every i (see [2]).

We denote: $\mathcal{F} = \{A \mid A \in \mathcal{A}, \mu(A) < +\infty\}$. In relation to intersection and symmetric difference, the set $\mathcal{F}$ is a ring.

Obviously, if $A \in F$ and $B \in F$ then $\mu(A) < +\infty$ and $\mu(B) < +\infty$. As $A \cap B \subseteq A$ it follows that $\mu(A \cap B) < +\infty$. We have still $A - B \subseteq A$ and $B - A \subseteq B$ with $\mu(A - B) < +\infty$ and $\mu(B - A) < +\infty$.

Hence :

$$\mu(A \Delta B) = \mu((A - B) \cup (B - A)) < \mu(A - B) + \mu(B - A) < +\infty$$

If we define the distance between the two sets in F as the measure of their symmetric difference, then F becomes a metric space [2].

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B) = \mu((A - B) \cup (B - A)) = \mu((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})),$$

where by $\bar{A}$ and $\bar{B}$ we have denoted the complements of A and B .

Let now $F^{(0)}$ be a subset in F . If $F^{(0)}$ is a ring, then the metric constructed on F , induces on $F^{(0)}$ a structure of metric space (see [1]).

Definition 1: Let $F^{(0)} \subset F$ be a ring of subsets in F . We shall say that $F^{(0)}$ is dense in F , if for every set $A \in F$ there is a sequence of sets $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset F^{(0)}$ so that $\rho(A, A_j)$ tends to zero when j goes to infinite, faster than a row with positive terms and with a constant sum.

Definition 2: We shall say that a subset $F^{(0)}$ in F has the property (P_1) if :

- a) $F^{(0)}$ is a ring
- b) for every $A \in F^{(0)}$ and for every $B \in F$

We have $A \cap B \in F^{(0)}$

Definition 3: We shall say that a subset $F^{(0)}$ in F has the property (P_2) if:

- a) $F^{(0)}$ is a metric space
- b) $F^{(0)}$ is dense in F
- c) $F^{(0)}$ has the property (P_1)

2. A closing theorem: We shall give now a theorem about the set $F^{(0)}$.

Theorem: The class of all subsets in F which have the property (P_2) is closed in relation to intersection.

Proof. We must prove that for every $F_\alpha^{(0)}, F_\beta^{(0)}$ -subsets in F and which have the property (P_2) , then and $F_\alpha^{(0)} \cap F_\beta^{(0)}$ has the same property.

We shall try to prove much more, that is:

if $\{\bigcap_\alpha F_\alpha^{(0)}\}_{\alpha \in N}$ is a sequence — each term having the property (P_2) , then, and $\bigcap_\alpha F_\alpha^{(0)}$ has the property (P_2)

Let us denote $\bigcap_\alpha F_\alpha^{(0)} = G$

We shall verify the three conditions from the definition 3.

a) G is a metric space: F is a ring and $F^{(0)}$ being a metric space with the distance $\rho(A, B) = \mu(A \Delta B)$, it follows that $\bigcap_\alpha F_\alpha^{(0)}$ is a metric space (see [1]).

b) G is dense in F : Let us use the fact that every $F_\alpha^{(0)}$ is dense in F . Let $A \in F$. We shall choose the sequence $A_j^{(x)}$ in $F_\alpha^{(0)}$ so that $\mu(A \Delta A_j^{(x)}) < \frac{1}{j} \varepsilon_\alpha$ with $\varepsilon_\alpha > 0$ and $\sum_\alpha \varepsilon_\alpha = 1$, $j = 1, 2, \dots$ (see definition 1).

Let us denote $B_j = \bigcap_\alpha A_j^{(x)}$. Then we have $B_j \subset A_j^{(x)} \in F_\alpha^{(0)}$. Hence $B_j \in G$ for every j .

We must show that $\mu(A \Delta B_j)$ tends to zero when j tends to infinite. We have:

$$(B_j - A) \subset A_j^{(x)} - A \subset (A_j^{(x)} - A) \cup (A - A_j^{(x)}) = A_j^{(x)} \Delta A$$

If we take the measure, we have:

$$\mu(B_j - A) < \mu(A_j^{(x)} \Delta A) < \frac{1}{j} \varepsilon_\alpha$$

According to De Morgan's relations we can write:

$$\begin{aligned} \mu(A - B_j) &= \mu(A - \bigcap_\alpha A_j^{(x)}) = \mu(A \cap (C \bigcap_\alpha A_j^{(x)})) = \mu(A \cap (\bigcup_\alpha C A_j^{(x)})) = \\ &= \mu(\bigcup_\alpha (A \cap C A_j^{(x)})) = \mu(\bigcup_\alpha (A - A_j^{(x)})) \leq \sum_\alpha \mu(A - A_j^{(x)}) \leq \\ &\leq \sum_\alpha \frac{1}{j} \varepsilon_\alpha = \frac{1}{j} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha = \frac{1}{j} \end{aligned}$$

Hence :

$$\begin{aligned}\rho(A, B_j) &= \mu(A \Delta B_j) = \mu((A - B_j) \cup (B_j - A)) \leq \\ &\leq \mu(A - B_j) + \mu(B_j - A) \leq \frac{1}{j}\end{aligned}$$

From it follows immediately :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(A, B_j) = 0$$

that is G is dense in F .

G has the property (P_1) : to prove that G is a ring, we shall use a lemma from the Kingman and Taylor's well-known book [2].

We shall call together with these authors, z -classes those classes endowed with the following structures: ring, algebra, σ -ring, σ -algebra and monotone class.

In this situation: if $F_\alpha^{(0)}$ is a z -class, then and $G = \bigcap F_\alpha^{(0)}$ is a z -class ([2]) pp. 15—17).

As $F_\alpha^{(0)}$ for every α is a ring, it follows that $\bigcap_\alpha F_\alpha^{(0)}$ is a ring.

$A \in G$ means $A \in \bigcap F_\alpha^{(0)}$ that is $A \in F_\alpha^{(0)}$ for every α .

As for every $B \in F_\alpha^{(0)}$, $A \cap B \in F_\alpha^{(0)}$ since $F_\alpha^{(0)}$ for every α has the property (P_1) , it follows that G has the same property. The theorem is proved.

REFERENCES

1. P. Halmos, *Measure Theory*, (Russian translation). I. I. L. Moscow, 1953.
2. J. F. Kingman and S. J. Taylor, *Introduction to Measure and Probability*, Cambridge 1966.

Received on 25th VI. 1970.

Faculty of Mathematics,
University of Bucharest
Academy of the S. R. of Romania
Centre of mathematical statistics

1900

THE JOURNAL OF THE

THE JOURNAL OF THE

THE JOURNAL OF THE

THE JOURNAL OF THE

THE JOURNAL OF THE

THE JOURNAL OF THE

THE JOURNAL OF THE

THE JOURNAL OF THE

OBIECTE GEOMETRICE ASOCIATE UNEI ECUAȚII ALGEBRICE DE GRAD n ÎNTR-UN SPAȚIU VECTORIAL E_n

VIRGILIU GANEA

În această lucrare se consideră polinoame $P_n(x)$ peste corpul numerelor reale, cărora li se asociază în spațiul vectorial euclidian E_n familii de n vectori $\bar{x}_i = ((x^1)^i, \dots, (x^n)^i)$; $i = 0, \dots, n-1$ unde $x^1, \dots, x^n$ sînt rădăcinile polinomului. Dacă rădăcinile sînt distincte atunci familiile $\{\bar{x}_i\}$ sînt libere și reci-proc.

Considerînd, o transformare Tschirnhausen în spațiul euclidian punctual $\mathcal{E}_n$ sîntem conduși la o transformare liniară a spațiului vectorial euclidian cu n dimensiuni.

În lucrare se arată că, grupul G_n de transformări Tschirnhausen poate fi reprezentat printr-un grup T_n de aplicații liniare ce depinde de n parametri.

În finalul lucrării se asociază unui polinom $P_n(x)$ elemente și obiecte geometrice ce pot servi la studiul și chiar la rezolvarea ecuațiilor algebrice.

Considerăm un polinom de gradul n

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

cu $a_l \in R$ corpul numerelor reale $l = 0, 1, \dots, n$

Notăm cu $x^1, \dots, x^n$ rădăcinile ecuației

$$P_n(x) = 0$$

pe care le presupunem de asemenea reale $x^i \in R$

În spațiul vectorial euclidian E_n ne alegem o bază ortonormală $\{\bar{e}_i\}$ pentru care avem

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cu } i = j \\ 0 & \text{cu } i \neq j \end{cases}$$

În raport cu aceasta baza, considerăm vectorii

$$\bar{x}_p = (x^1)^p \bar{e}_1 + (x^2)^p \bar{e}_2 + \dots + (x^n)^p \bar{e}_n \quad (1)$$

unde p are dublul rol de indice și de exponent.

Dacă $p \in Z$ (mulțimea numerelor întregi) rezultă o familie de vectori $\{\bar{x}_p\}$,
Formăm produsele scalare.

$$\langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle = (x^1)^{i+j} + (x^2)^{i+j} + \dots + (x^n)^{i+j}$$

Însă

$$\langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle = \|\bar{x}_i\| \cdot \|\bar{x}_j\| \cdot \cos \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle = S_{i+j} \quad (2)$$

unde S_{i+j} reprezintă sumele de puteri asemenea ale rădăcinilor.

În (2) facem $j = i$

$$\langle \bar{x}_i, \bar{x}_i \rangle = \|\bar{x}_i\|^2 = S_{2i}$$

și vom obține pentru „norma” vectorului $\bar{x}_i$

$$\|\bar{x}_i\| = \sqrt{S_{2i}}$$

Vom demonstra următoarea :

Teorema: Dacă rădăcinile $x^1, \dots, x^n$ ale polinomului $P_n(x)$ sînt distincte există în familia de vectori $\{\bar{x}_p\}$ n vectori liniari independenți și reciproc.
Demonstrație.

Determinantul lui Gram pentru vectorii $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}$

$$D(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) = \begin{vmatrix} \langle \bar{x}_0, \bar{x}_0 \rangle & \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{x}_0, \bar{x}_{n-1} \rangle \\ \langle \bar{x}_1, \bar{x}_0 \rangle & \langle \bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{x}_1, \bar{x}_{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_0 \rangle & \langle \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_1 \rangle & \dots & \langle \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-1} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix} \quad (3)$$

este diferit de zero, deoarece coincide cu discriminantul polinomului $P_n(x)$ și prin urmare vectorii $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}$ în număr de n sînt liniari independenți.

Vom arăta ca $n + 1$ vectori din $\{\bar{x}_p\}$ $p \in Z$ sînt liniari dependenți.

Ținem seama că

$$P_n(x^i) = a_0 + a_1 x^i + a_2 (x^i)^2 + \dots + a_n (x^i)^n = 0$$

Amplificînd cu $\bar{e}_i$ și sumînd obținem

$$a_0 x_0 + a_1 \bar{x}_1 + \dots + a^n \bar{x}_n = 0 \quad (4)$$

Relația (4) ne arată că, vectorii $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ în număr de $n + 1$ sînt liniari dependenți.

Asupra coeficienților b_j și $b_j^{(k)}$ adoptăm notațiile respective b_1^j și b_k^j și (11) sînt succeseptibile la

$$\bar{y}_k = b_k^j \bar{x}_j \quad \left(\begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, n-1 \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right) \quad (12)$$

În (12) am adoptat convenția de sumare a lui Eistein în raport cu indicele j

Vectorii $\bar{y}_k$ au componentele

$$(y^1)^k, (y^2)^k, \dots, (y^n)^k$$

Dacă luăm $k = 0, \dots, n-1$ și ținînd seama că $b_0^0 = 1$, $b_0^1 = \dots = b_0^{n-1} = 0$ atunci (12) definesc în spațiul vectorial euclidian E_n trecerea de la baza $\{\bar{x}_j\}$ la baza $\{\bar{y}_j\}$ cu $j = 0, 1, \dots, n-1$

Relația (12) definește o transformare liniară a spațiului vectorial euclidian E_n în el însuși.

Deci prin (12) am asociat elementului $S_b \in G_n$ operatorul $B \in T_n$ avînd matricea.

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1^0 & b_1^1 & \dots & b_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1}^0 & b_{n-1}^1 & \dots & b_{n-1}^{n-1} \end{array} \right\|$$

Evident că, produsului a două elemente ale grupului G_n îi corespunde produsul operatorilor corespunzători din T_n

Ținînd seama de (6) putem scrie

$$\Sigma_k = b_k^i S_i \quad (13)$$

și luînd $i, k = 0, 1, \dots, n$ sîntem conduși la

Teorema : În raport cu transformarea (12) cantitățile S_i sume de puteri asemenea ale rădăcinilor polinomului $P_n(x)$ se comportă ca și componentele covariante ale unui vector $\bar{S}$

Fie Σ_i noile componente

Considerăm doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ în raport cu

$$\{\bar{x}_j\}; \quad j = 0, \dots, n-1 \quad \bar{a} = a^i \bar{x}_i \quad \bar{b} = b^i \bar{x}_i$$

atunci

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = a^i b^j \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle \quad (14)$$

Notăm

$$\langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle = g_{ij}$$

și (14) devine.

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = g_{ij} a^i b^j$$

Evident că $g_{ij} = g_{ii}$

Considerăm vectorii

$$\bar{y}_l = b_l^i \bar{x}_i \quad \bar{y}_q = \bar{b}_q^i \bar{x}_i$$

și după (14) rezultă

$$\langle \bar{y}_l, \bar{y}_q \rangle = b_l^i \bar{b}_q^j \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle \quad (15)$$

Dar

$$\langle \bar{y}_l, \bar{y}_q \rangle = \Sigma_{l+q}$$

unde Σ_{l+q} sînt „sume de puteri asemenea ale rădăcinilor $y^1, \dots, y^n$ ale polinomului transformat $Q_n(y)$

(15) ne conduce la

$$\Sigma_{l+q} = b_l^i \bar{b}_q^j S_{i+j} \quad (16)$$

În legătură cu (16) vom da

Teorema

Sumele

$$S_{i+j} = g_{ij} = \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle$$

definesc un tensor simetric de două ori covariant în raport cu transformarea (12)

$g_{ij} = S_{i+j}$ fiind „tensorul metric al spațiului E_n în raport cu baza $\{\bar{x}_j\}$ asociat polinomului $P_n(x)$

Dacă în (15) facem $q = l$ obținem

$$\langle \bar{y}_l, \bar{y}_l \rangle = \|\bar{y}_l\|^2 = b_l^i \bar{b}_l^j \langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle = b_l^i \bar{b}_l^j S_{i+j}$$

și pentru norma vectorului $\bar{y}_l$ avem

$$\|\bar{y}_l\| = \sqrt{b_l^i \bar{b}_l^j S_{i+j}}$$

Într-un alt studiu, voi considera rădăcinile $x^1, \dots, x^n$ nu toate distincte și în acest caz voi asocia polinomului $P_n(x)$ elemente și obiecte geometrice în subspații ale spațiului vectorial euclidian E_n

BIBLIOGRAFIE

Lichnerowicz A., *Eléments de Calcul Tensoriel*. Ed. Armand Collin, Paris, 1964.

Primită la 10. V. 1970

Institutul politehnic București

OBJETS GÉOMÉTRIQUES ASSOCIÉS À UNE ÉQUATION ALGÈBRE DE DEGRÉ n DANS UN ESPACE VECTORIEL E_n

R é s u m é

En considérant une transformation de Tschirnhausen dans l'espace euclidien ponctuel $\mathbb{S}_n$, on arrive à une transformation linéaire de l'espace vectoriel euclidien à n dimensions. On démontre ainsi que le groupe G_n de transformations Tschirnhausen peut être représenté par un groupe T_n d'applications linéaires qui dépendent de n paramètres.

SPAȚII RIEMANN V_2 CU CONEXIUNE LINIARĂ LOCAL EUCLIDIENE

EFTIMIE I. GRECU

Utilizînd o teoremă demonstrată de T. Postelnicu [3] referitoare la reducerea la o formă canonică a conexiunii spațiilor A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene, se determină spațiile riemanniene V_2 cu conexiune liniară local euclidiene.

Un spațiu riemannian V_n este cu conexiune liniară dacă există un sistem de variabile $x^1, \dots, x^n$ în care simbolurile lui Christoffel de a doua speță ale metricii lui V_n

$$dS^2 = a_{ij} dx^i dx^j$$

presupusă ca fiind nedegenerată, sînt funcții liniare în variabile $x^1, \dots, x^n$, deci

$$|\begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}| = -\Gamma_{jk}^i = A_{jkl}^i x^l + A_{jk}^i$$

unde A_{jk}^i, A_{jkl}^i sînt constanți, ($i, j, k, l = 1, \dots, n$)

Componentele a_{ij} ale tensorului fundamental sînt soluții ale sistemului cu diferențiale totale

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{is} \Gamma_{jk}^s + a_{js} \Gamma_{ik}^s = 0 \quad (1)$$

ale cărui condiții de integrabilitate sînt

$$\begin{aligned} a_{is} \Gamma_{jkl}^s + a_{js} \Gamma_{ikl}^s &= 0 \\ a_{is} \Gamma_{jkl,p}^s + a_{js} \Gamma_{ikl,p}^s &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

unde Γ_{jkl}^i sînt componentele tensorului de curbura al spațiului V_n , iar $\Gamma_{jkl,p}^i, \dots$ sînt componentele tensorilor derivați de curbura. Pentru un spațiu V_n local euclidian, aceste condiții sînt identic satisfăcute, iar metrica lui V_n

depinde de $\frac{1}{2} n(n-1)$ constante arbitrare. În cazul cînd $n = 2$, sistemul (1) se scrie dezvoltat sub forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2(\Gamma_{11}^1 a_{11} + \Gamma_{11}^2 a_{12}) &= 0 \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2(\Gamma_{12}^1 a_{11} + \Gamma_{12}^2 a_{12}) &= 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \Gamma_{12}^1 a_{11} + (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) a_{12} + \Gamma_{11}^2 a_{22} &= 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^1 a_{11} + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) a_{12} + \Gamma_{12}^2 a_{22} &= 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2(\Gamma_{12}^1 a_{12} + \Gamma_{12}^2 a_{22}) &= 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2(\Gamma_{22}^1 a_{12} + \Gamma_{22}^2 a_{22}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

iar metrica spațiului V_2 local euclidian va depinde de 3 constante arbitrare, număr egal cu numărul componentelor tensorului a_{ij} , ($i, j = 1, 2$)

Se mai poate determina metrica integrînd sistemul

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial z}{\partial x^i} = 0$$

complet integrabil, a cărui soluție generală are forma

$$z = a_0 + a_i z^i$$

unde a_0, a_i sînt constante, iar z^i sînt funcții liniar independente, astfel încît componentele a_{ij} sînt date de formulele, [5]

$$a_{ij} = c_{rs} \frac{\partial z^r}{\partial x^i} \frac{\partial z^s}{\partial x^j}$$

unde c_{rs} sînt constante simetrice cu $|c_{rs}| \neq 0$

În cele ce urmează vom căuta să determinăm spațiile riemanniene V_2 cu conexiune liniară local euclidiene, utilizînd următoarea teoremă demonstrată de T. Postelnicu în [3], referitoare la reducerea la o formă canonică a conexiunii unui spațiu A_2 cu conexiune afină liniară local euclidian:

Teoremă. Un spațiu A_2 cu conexiune afină liniară local euclidian poate fi adus la formele canonice:

$$[I] \quad \Gamma_{11}^1 = x^2, \quad \Gamma_{12}^1 = \varepsilon \Gamma_{11}^2 = x^1 + \varepsilon k x^2, \quad \Gamma_{12}^2 = \varepsilon \Gamma_{22}^1 = k x_2^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2,$$

$$\Gamma_{22}^2 = (1 + \varepsilon k^2) x^1 + k(k^2 + 2\varepsilon) x^2$$

$$[II] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \varepsilon x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = \varepsilon' x^1, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \varepsilon' x^2$$

$$[III] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \varepsilon x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2$$

dacă Γ_{11}^1 și Γ_{11}^2 sînt liniar independente și unde componentele nescrise ale conexiunii sînt nule, iar $\varepsilon, \varepsilon'$ sînt ± 1

Dacă Γ_{11}^1 și Γ_{11}^2 sînt liniar dependente, iar Γ_{11}^2 depinde de x^1 , avem formele canonice

$$[IV] \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \varepsilon \Gamma_{12}^2 = x^1 + \varepsilon x^2$$

$$[V] \quad \Gamma_{12}^1 = \varepsilon \Gamma_{22}^1 = \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2$$

$$[VI] \quad \Gamma_{12}^1 = 1, \quad \Gamma_{12}^2 = \varepsilon \Gamma_{22}^1 = \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 + \varepsilon - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2$$

$$[VII] \quad \Gamma_{11}^1 = \tau, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = x^1$$

unde $\tau = 0, 1$, iar γ este o constantă arbitrară.

Dacă Γ_{11}^1 și Γ_{11}^2 sînt liniar dependente, iar Γ_{11}^2 nu depinde de x^1 , avem forma canonică

$$[VIII] \quad \Gamma_{11}^1 = \tau, \quad \Gamma_{11}^2 = -x^2, \quad \Gamma_{12}^2 = \gamma$$

unde $\tau = 0, 1$, iar $\gamma^2 - \tau\gamma - 1 = 0$

Dacă Γ_{11}^2 nu depinde de x^1, x^2 , însă Γ_{11}^1 depinde de x^1, x^2 cele două componente fiind liniar dependente, avem

$$[IX] \quad \Gamma_{11}^1 = x^1, \quad \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2$$

$$[X] \quad \Gamma_{11}^1 = x^1 + x^2, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = x^1 + x^2 + \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = 1, \quad \Gamma_{22}^2 = \gamma + 1$$

$$[XI] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = x^1 + x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = x^1 + (1 - \beta) x^2 - \gamma, \quad \Gamma_{22}^2 = \beta x^2 + \gamma$$

$$[XII] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = 1$$

$$[XIII] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 1 + x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = 1$$

$$[XIV] \quad \Gamma_{11}^1 = x^1, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = \tau, \quad (\gamma \neq 0)$$

Dacă $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ sînt constante, avem

$$[XV] \quad \Gamma_{12}^1 = \rho, \quad \Gamma_{22}^2 = \alpha, \quad \Gamma_{22}^1 = \rho(\alpha - \rho)x^1 + \beta x^2 + \gamma, \quad (\rho = 0)$$

$$[XVI] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \tau, \quad \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = b x^2 + c$$

$$[XVII] \quad \Gamma_{11}^1 = 1, \quad \Gamma_{12}^1 = \gamma, \quad \Gamma_{22}^1 = -\gamma(\varepsilon x^2 - \gamma), \quad \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2$$

$$[XVIII] \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = \varepsilon x^1 + \alpha$$

$$[XIX] \quad \Gamma_{11}^1 = 1, \quad \Gamma_{12}^1 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = -\varepsilon(\gamma x^2 + 1), \quad \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2 + \gamma.$$

Vom considera acum, pe rînd, fiecare din cele nouăsprezece tipuri de spații A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene și vom determina, în fiecare caz în parte, spațiul riemannian V_2 cu conexiune liniară local euclidian corespunzător.

$$[I] \quad \Gamma_{11}^1 = x^2, \quad \Gamma_{12}^1 = \varepsilon \Gamma_{11}^2 = x^1 + \varepsilon k x^2, \quad \Gamma_{12}^2 = \varepsilon \Gamma_{22}^1 = k x^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2,$$

$$\Gamma_{22}^2 = (1 + \varepsilon k^2) x^2 + k(k^2 + 2\varepsilon) x^2$$

Sistemul (2) se scrie

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2x^2 a_{11} + 2\varepsilon(x^1 + \varepsilon k x^2) a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + 2(x^1 + \varepsilon k x^2) a_{11} + 2[kx^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + (x^1 + \varepsilon k x^2) a_{11} + [kx^1 + (2 + \varepsilon k^2) x^2] a_{12} + \varepsilon(x^1 + \varepsilon k x^2) a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial x^2} + \varepsilon[kx^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] a_{11} + [(2 + \varepsilon k^2) x^1 + k(k^2 + 3\varepsilon) x^2] a_{12} +$$

$$+ [Kx^1 + (kx^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2) a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2(x^1 + \varepsilon k x^2) a_{12} + 2([kx^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\varepsilon[kx^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] a_{12} + 2[(1 + \varepsilon k^2) x^1 + k(k^2 + 2\varepsilon) x^2] a_{22} = 0.$$

de unde obținem ecuațiile cu derivate parțiale

$$[kx^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2] \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} - (\varepsilon x^1 + kx^2) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^2} = 2[\varepsilon(x^1)^2 + kx^1 x^2 - (x^2)^2] a_{ij};$$

$$(i, j = 1, 2)$$

căroră li se asociază sistemele caracteristice

$$\frac{dx^1}{Kx^1 + (1 + \varepsilon k^2) x^2} = - \frac{dx^2}{\varepsilon x^1 + Kx^2} = \frac{da_{ij}}{2[\varepsilon(x^1)^2 + Kx^1 x^2 - (x^2)^2] a}$$

ale căror integrale prime sînt

$$\varepsilon(x^1)^2 + 2kx^1x^2 + (1 + \varepsilon k^2)(x^2) = A, \quad a_j = A_{ij} e^{\frac{1}{K}[\varepsilon(x^1)^2 + (x^2)^2]}$$

unde $A_i A_{ij}$ sînt constante de integrare, așa încît avem

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(t) e^{\frac{1}{K}[\varepsilon(x^1)^2 + (x^2)^2]},$$

unde

$$t = \varepsilon(x^1)^2 + 2kx^1x^2 + (1 + \varepsilon k^2)(x^2)^2$$

funcțiile $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ satisfacînd sistemul de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

$$k\varphi'_{11} + \varphi_{11} + k\varphi_{12} = 0$$

$$2k\varphi'_{12} + (2 + \varepsilon k^2)\varphi_{12} + \varepsilon k\varphi_{11} + k\varphi_{22} = 0$$

$$k\varphi'_{22} + (1 + \varepsilon k^2)\varphi_{22} + \varepsilon k\varphi_{12} = 0$$

a cărei soluție generală se scrie

$$\varphi_{11} = c_i e^{r_i t}$$

$$\varphi_{12} = -\left(\frac{1}{K} + r_i\right) C_i e^{r_i t}$$

$$\varphi_{22} = \varepsilon \frac{1 + Kr_i}{1 + \varepsilon K^2 + Kr_i} C_i e^{r_i t}$$

unde r_i sînt rădăcinile ecuației caracteristice asociate sistemului, iar C_i sînt constante de integrare.

Componentele a_{ij} ale tensorului fundamental are deci expresiile

$$a_{11} = C_i e^{r_i t} e^{\frac{1}{K}[\varepsilon(x^1)^2 + (x^2)^2]}$$

$$a_{12} = -\left(\frac{1}{K} + r_i\right) C_i e^{r_i t} e^{\frac{1}{K}[\varepsilon(x^1)^2 + (x^2)^2]}$$

$$a_{22} = \varepsilon \frac{1 + Kr_i}{1 + \varepsilon K^2 + Kr_i} C_i e^{r_i t} e^{\frac{1}{K}[\varepsilon(x^1)^2 + (x^2)^2]}$$

astfel încît metrica lui V_2 se scrie

$$dS^2 = e^{\frac{1}{K} [\varepsilon(x^1)^2 + (x^2)^2]} \left[C_i e^{r_i t} (dx^1)^2 - 2 \left(\frac{1}{K} + r_i \right) C_i e^{r_i t} dx^1 dx^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon \frac{1 + Kr_i}{1 + \varepsilon K^2 + Kr_i} C_i e^{r_i t} (dx^2)^2 \right]$$

unde se sumează în raport cu $i = 1, 2, 3$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt

$$u^h = \int_0^{x^1} e^{\varepsilon \left(\frac{1}{2K} + \rho_h \right) t^2} dt - \\ - \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{K} + (2\rho_h) \right) e^{\varepsilon \left(\frac{1}{2K} + \rho_h \right) (x^1)^2 + 2K\rho_h x^1 t + \left[\frac{1}{2K} + (1 + \varepsilon K^2) \rho_h \right] t^2} dt$$

unde ρ_h ($h = 1, 2$) sînt rădăcinile ecuației

$$4k^2 \rho^2 + 2k(2 + \varepsilon k^2) \rho + 1 = 0$$

Metrica lui devine

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j, \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\text{II]} \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \varepsilon x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = \varepsilon' x^1, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \varepsilon' x^2$$

Obținem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2\varepsilon x^1 a_{11} + 2\varepsilon x^2 a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\varepsilon' x^2 a_{11} + 2\varepsilon x^1 a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \varepsilon' x^2 a_{11} + 2\varepsilon x^1 a_{12} + \varepsilon x^2 a_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + \varepsilon' x^1 a_{11} + 2\varepsilon' x^2 a_{12} + \varepsilon x^1 a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\varepsilon' x^2 a_{12} + 2\varepsilon x^1 a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\varepsilon' x^1 a_{12} + 2\varepsilon' x^2 a_{22} = 0$$

de unde rezultă ecuațiile cu derivate parțiale

$$x^1 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^2} = 2[\varepsilon'(x^2)^2 - 2[\varepsilon'(x^2)^2 - \varepsilon(x^1)^2] a_{ij} \quad (i, j = 1, 2)$$

căroră li se asociază sistemele caracteristice

$$\frac{\partial x^1}{x^1} = - \frac{dx^2}{x^2} = \frac{da_{ij}}{2[\varepsilon'(x^2)^2 - \varepsilon(x^1)^2] a_{ij}}$$

care ne dau prin integrare

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(t) e^{-[\varepsilon(x^1)^2 + \varepsilon(x^2)^2]}$$

unde $t = x^1 x^2$

Funcțiile φ_{ij} satisfac sistemul de ecuații

$$\varphi'_{11} + 2\varepsilon\varphi_{12} = 0$$

$$\varphi'_{11} + \varepsilon'\varphi_{11} + \varepsilon\varphi_{22} = 0$$

$$\varphi'_{22} + 2\varepsilon'\varphi_{12} = 0$$

Căutînd soluții particulare de forma

$$\varphi_{ij}(t) = \alpha_{ij} e^{rt}$$

obținem ecuația caracteristică

$$\Delta(r) = r(r^2 - 4\varepsilon\varepsilon') = 0$$

ale cărei soluții sînt

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \pm \sqrt{2\varepsilon\varepsilon'}$$

Avem de deosebit două cazuri

a) $\varepsilon\varepsilon' = +1$

În acest caz avem

$$\varphi_{11} = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$$

$$\varphi_{12} = \varepsilon(-C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t})$$

$$\varphi_{22} = -C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$$

deci a_{ij} au expresiile

$$a_{11} = (c_1 + c_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}) e^{-\varepsilon[(x^1)^2 + (x^2)^2]}$$

$$a_{12} = \varepsilon(-c_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}) e^{-\varepsilon[(x^1)^2 + (x^2)^2]}$$

$$a_{22} = (-C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}) e^{-\varepsilon[(x^1)^2 + (x^2)^2]}$$

Dacă punem

$$u^1 = \int_0^{x^1 - \alpha x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t^2} dt, \quad u^2 = \int_0^{x^1 - \varepsilon x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t^2} dt$$

obținem

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j, \quad (i, j = 1, 2)$$

unde avem

$$C_1 = 2c_{12}, \quad C_2 = c_{11}, \quad C_3 = c_{22}$$

b) $\varepsilon\varepsilon' = -1$

Funcțiile φ_{ij} au expresiile

$$\varphi_{11} = C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t$$

$$\varphi_{12} = \varepsilon(C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t)$$

$$\varphi_{22} = C_1 - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t$$

iar a_{ij} sînt

$$a_{11} = (C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t) e^{\varepsilon\rho}$$

$$a_{12} = \varepsilon(C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t) e^{\varepsilon\rho}$$

$$a_{22} = (C_1 - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t) e^{\varepsilon\rho}$$

Dacă punem

$$du^1 = e^{\frac{\varepsilon}{2}\rho} (\cos t \cdot dx^1 + \varepsilon \sin t \cdot dx^2)$$

$$du^2 = e^{\frac{\varepsilon}{2}\rho} (\sin t \cdot dx^1 - \varepsilon \cos t \cdot dx^2)$$

unde

$$\rho = (x^2)^2 - (x^1)^2$$

obținem

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j \quad (i, j = 1, 2)$$

unde avem

$$C_1 = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22})$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{22})$$

$$C_3 = c_{12}$$

$$[III] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon x^2$$

Componentele a_{ij} sînt soluții ale sistemului

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2(\varepsilon x^1 a_{11} + \varepsilon x^2 a_{12}) = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\varepsilon x^1 a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + 2\varepsilon x^1 a_{12} + \varepsilon x^2 a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + \varepsilon x^1 a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\varepsilon x^1 a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = 0$$

de unde rezultă imediat

$$a_{22} = c_{22} e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

Avem apoi

$$a_{12} = \varphi(x^1) - c_{22} \varepsilon x^1 x^2 e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

unde φ verifică ecuația

$$\varphi' + 2\varepsilon x^1 \varphi = 0$$

care are soluția

$$\varphi = c_{12} e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

astfel că putem scrie

$$a_{12} = (C_{12} - C_{22} \varepsilon x^1 x^2) e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

$$a_{11} = \Psi(x^1) - 2\varepsilon x^1 \left[C_{12} x^2 - c_{22} \varepsilon x^1 \frac{(x^2)^2}{2} \right] e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

unde

$$\Psi' + 2\varepsilon x^1 \Psi = 0$$

deci

$$\Psi = C_{11} e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

Avem deci componentele

$$a_{11} = [C_{11} - 2\varepsilon C_{12} x^1 x^2 + C_{22} (x^1)^2 (x^2)^2] e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

$$a_{12} = (C_{12} - \varepsilon C_{22} x^1 x^2) e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

$$a_{22} = c_{22} e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t^2} dt, \quad u^2 = x^2 e^{-\frac{\varepsilon}{2} (x^1)^2}$$

$$[IV] \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \varepsilon \Gamma_{12}^2 = x^1 + \varepsilon x^2$$

Avem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2(x^1 + \varepsilon x^2) a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\varepsilon(x^1 + \varepsilon x^2) a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \varepsilon(x^1 + \varepsilon x^2) a_{12} + (x^1 + \varepsilon x^2) a_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + (x^1 + \varepsilon x^2) a_{12} + \varepsilon(x^1 + \varepsilon x^2) a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\varepsilon(x^1 + \varepsilon x^2) a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2(x^1 + \varepsilon x^2) a_{22} = 0$$

de unde obținem

$$a_{22} = \varphi(x^2) e^{-\varepsilon(x^1)^2 - 2x^1x^0}$$

funcția φ verificând ecuația

$$\varphi' + 2\varepsilon x^2 \varphi = 0$$

care are soluția

$$\varphi = C_{22} e^{-\varepsilon(x^2)^2}$$

astfel încât putem scrie

$$a_{22} = c_{22} e^{-\varepsilon(x^1)^2 - \varepsilon(x^2)^2 - 2x^1x^0}$$

Avem apoi ecuațiile cu derivate parțiale

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} - \varepsilon \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} - \varepsilon \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = 0$$

căroră le asociem sistemul caracteristic

$$\frac{dx^1}{1} = \frac{dx^2}{-\varepsilon}$$

a cărui integrală primă este

$$\varepsilon x^1 + x^2 = k$$

Rezultă astfel soluțiile

$$a_{11} = \Psi(t), \quad a_{12} = \chi(t),$$

unde

$$t = \varepsilon x^1 + x^2$$

funcțiile Ψ , χ verificând ecuațiile

$$\Psi'' + 2t\chi = 0$$

$$\chi' + \varepsilon t\chi + C_{22}t e^{-\varepsilon t^2} = 0$$

Integrând, obținem

$$\chi(t) = (C_{12} + \varepsilon C_{22} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}) e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}$$

și apoi

$$\Psi(t) = C_{11} + 2\varepsilon C_{12} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} + C_{22}e^{-\varepsilon t^2}$$

Rezultă deci componentele

$$a_{11} = C_{11} + 2\varepsilon C_{12} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t^2} + C_{22} e^{-\varepsilon t^2}$$

$$a_{12} = C_{12} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t^2} + \varepsilon C_{22} e^{-\varepsilon t^2}$$

$$a_{22} = C_{22} e^{-\varepsilon t^2}$$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = \int e^{-\frac{\varepsilon}{2} t^2} dt,$$

unde

$$t = \varepsilon x^1 + x^2$$

$$[V] \quad \Gamma_{12}^1 = \varepsilon \Gamma_{22}^1 = \gamma \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2$$

Sistemul (2) se scrie în acest caz

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + (x^1 + \varepsilon x^2) a_{12} = 0 \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{11} + 2(\varepsilon x^1 + x^2) a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \gamma a_{11} + (\varepsilon x^1 + x^2) a_{12} + (x^1 + \varepsilon x^2) a_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + \varepsilon \gamma a_{11} + (x^1 + \varepsilon x^2) + 2\gamma) a_{12} + (\varepsilon x^1 + x^2) a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\gamma a_{12} + 2(\varepsilon x^1 + x^2) a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\varepsilon \gamma a_{12} + 2(x^1 + \varepsilon x^2 + \gamma) a_{22} = 0$$

de unde obținem ecuațiile cu derivate parțiale

$$\varepsilon \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^2} = 2\gamma a_{ij} \quad (i, j = 1, 2)$$

Sistemele caracteristice asociate se scriu

$$\varepsilon dx^1 = -dx^2 = \frac{1}{2\gamma} \frac{da_{ij}}{a_{ij}}$$

de unde obținem integralele prime

$$x^1 + \varepsilon x^2 = k, \quad a_{ij} = k_i e^{2\varepsilon \gamma x^1}$$

Avem astfel componentele

$$a_{ij} = -\varphi_{ij}(t) e^{2\gamma \varepsilon x},$$

unde

$$t = x^1 + \varepsilon x^2$$

funcțiile φ_{ij} satisfacînd sistemul

$$\varphi'_{11} + 2\varepsilon\gamma\varphi_{11} + 2t\varphi_{12} = 0$$

$$\varphi'_{12} + \varepsilon(t + 2\gamma)\varphi_{12} + \gamma\varphi_{11} + t\varphi_{22} = 0$$

$$\varphi'_{22} + 2\varepsilon(t + \gamma)\varphi_{22} + 2\gamma\varphi_{12} = 0$$

Coordonatele carteziene ale lui V_2 local euclidiene sînt

$$u^i = \int_0^{x^1} \varphi_i(t) dt - \int_0^{x^2} \frac{\varphi'_i(x^1 + \varepsilon t)}{x^1 + \varepsilon t} e^{-\gamma t} dt, \quad (u = 1, 2)$$

unde φ_1, φ_2 satisfac ecuația diferențială $t\varphi'' + (\varepsilon t^2 - 1)\varphi' - \gamma t^2\varphi = 0$

$$[\text{VI}] \quad \Gamma_{11}^1 = 1, \quad \Gamma_{12}^1 = \varepsilon\Gamma_{22}^1 = \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = \varepsilon\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 + \varepsilon - \gamma = x^1 + \varepsilon x^2$$

Obținem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2a_{11} + 2(x^1 + \varepsilon x^2)a_1 = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = 2\gamma a_{11} + 2(\varepsilon x^1 + x^2)a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \gamma a_{11} + (1 + \varepsilon x^1 + x^2)a_{12} + (x^1 + \varepsilon x^2)a_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + \varepsilon\gamma a_{11} + (x^1 + \varepsilon x^2 + 2\gamma - \varepsilon)a_{12} + (\varepsilon x^1 + x^2)a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\gamma a_{12} + 2(\varepsilon x^1 + x^2)a_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\varepsilon\gamma a_{12} + 2(x^1 + \varepsilon x^2 + \gamma - \varepsilon)a_{22} = 0$$

de unde rezultă ecuațiile cu derivate parțiale

$$\varepsilon \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^2} = 2(\gamma - \varepsilon)a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2)$$

căroră li se asociază sistemele caracteristice

$$\frac{dx^1}{\varepsilon} = -dx^2 = \frac{da_{ij}}{2(\gamma - \varepsilon)a_{ij}}$$

ce au integralele prime

$$x^1 + \varepsilon x^2 = k, \quad a_{ij} = k_{ij} e^{-2(x^1 + \gamma x^2)}$$

astfel că avem componentele

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(t) e^{-2(x^1 + \gamma x^2)},$$

unde

$$t = x^1 + \varepsilon x^2$$

unde funcțiile φ_{ij} satisfac sistemul

$$\varphi'_{11} + 2t\varphi_{12} = 0$$

$$\varphi'_{12} + (\varepsilon t - 1)\varphi_{12} + \gamma\varphi_{11} + t\varphi_{22} = 0$$

$$\varphi'_{22} + 2(\varepsilon t - 1)\varphi_{22} + 2\gamma\varphi_{12} = 0$$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt date de formulele

$$u^i = \int_0^{x^1} e^{-u} \varphi_i(u) du - \int_0^{x^2} \frac{\varphi'_i(x^1 + \varepsilon u)}{x^1 + \varepsilon u} e^{-(x^1 + \gamma x^2)} du, \quad (i = 1, 2)$$

unde φ_1, φ_2 sînt două soluții ale ecuației diferențiale

$$t\varphi'' + (\varepsilon t^2 - t - 1)\varphi' - \gamma t^2\varphi = 0$$

$$[\text{VII}] \quad \Gamma_{11}^1 = \tau, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = x^1$$

Sistemul (2) se scrie

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2\tau a_{11} + 2x^1 a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{11} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \gamma a_{11} + \tau a_{12} + x^1 a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\gamma a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{22} = 0$$

Rezultă

$$a_{11} = f(x^1) e^{-2\gamma x^2}, \quad a_{12} = g(x^1) e^{-2\gamma x^2}, \quad a_{22} = h(x^1) e^{-2\gamma x^2}$$

unde funcțiile f, g, h satisfac sistemul de ecuații

$$f' + 2\tau f + 2x^1 g = 0$$

$$g' + \tau g + \gamma f + x^1 h = 0$$

$$h' + 2\gamma g = 0$$

Dacă

$$h = 2\gamma C_i h_i: \quad (i = 1, 2, 3),$$

rezultă

$$g = -C_i h_i, \quad f = \frac{1}{\gamma} C_i (h_i'' + \tau h_i' - 2\gamma x^1 h_i)$$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt

$$u^i = \psi_i(0) - \psi_i(x^1) e^{-\varepsilon x^2}, \quad (i = 1, 2)$$

unde ψ_i satisfac ecuația

$$\psi'' + \tau\psi' - \gamma x^1 \psi = 0$$

$$[\text{VIII}] \quad \Gamma_{11}^1 = \tau, \quad \Gamma_{11}^2 = -x^2, \quad \Gamma_{12}^2 = \gamma$$

unde $\tau = 0, 1; \gamma^2 - \tau\gamma - 1 = 0$

Obținem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2\tau a_{11} - 2x^2 a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial a^2} + 2\gamma a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + (\gamma + \tau) a_{12} - x^2 a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + \gamma a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\gamma a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = 0$$

de unde rezultă

$$a_{22} = C_{22} e^{-2\gamma x^1}$$

$$a_{12} = \varphi(x^1) - \gamma C_{22} x^2 e^{-2\gamma x^1}$$

funcția φ satisfăcînd ecuația

$$\varphi^1 + 2\gamma^2 C_{22} x^2 e^{-2\gamma x^1} + (\gamma + \tau) (\varphi - \gamma C_{22} x^2 e^{-2\gamma x^1}) - x^2 C_{22} e^{-2\gamma x^1} = 0$$

Distingem două cazuri:

a) $\tau = 0$, deci $\gamma^2 = 1$. Avem ecuația

$$\varphi' + \gamma\varphi = 0$$

care are soluția

$$\varphi = C_{12} e^{-\gamma x^1}$$

Rezultă

$$a_{12} = C_{12} e^{-\gamma x^1} - \gamma C_{22} x^2 e^{-2\gamma x^1}$$

$$a_{11} = \psi(x^1) - 2\gamma C_{12} x_2 e^{-\gamma x^1} + C_{22} (x^2)^2 e^{-2\gamma x^1}$$

unde $\psi' = 0$, deci $\psi = C_{11}$. Avem deci componentele

$$a_{11} = C_{11} - 2\gamma C_{12}x^2e^{-\gamma x^1} + C_{22}(x^2)^2e^{-2\gamma x^1}$$

$$a_{12} = C_{12}e^{-\gamma x^1} - \gamma C_{12}x^2e^{-2\gamma x^1}$$

$$a_{22} = C_{22}e^{-2\gamma x^1}$$

Coordonatele cartezienne sînt în acest caz

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2e^{-\gamma x^1}$$

b) $\tau = 1$ deci $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$. Rezultă ecuația

$$\varphi' + (\gamma + 1)\varphi = 0$$

cu soluția

$$\varphi = C_{12}e^{-(\gamma+1)x^1}$$

astfel că

$$a_{12} = C_{12}e^{-(\gamma+1)x^1} - \gamma C_{22}x^2e^{-2\gamma x^1}$$

$$a^{11} = \psi(x^1) - 2\gamma C_{12}x^2e^{-(\gamma+1)x^1} + \gamma^2 C_{22}(x^2)^2e^{-2\gamma x^1}$$

unde ψ satisface ecuația

$$\psi + 2\psi = 0$$

care are soluția

$$\psi = C_{11}e^{-2x^1}$$

Avem componentele

$$a_{11} = C_{11}e^{-2x^1} - 2\gamma C_{12}x^2e^{-(\gamma+1)x^1} + \gamma^2 C_{22}(x^2)^2e^{-2\gamma x^1}$$

$$a_{12} = C_{12}e^{-(\gamma+1)x^1} - \gamma C_{22}x^2e^{-2\gamma x^1}$$

$$a_{22} = C_{22}e^{-2\gamma x^1}$$

Dacă punem

$$u^1 = -e^{-x^1}, \quad u^2 = x^2e^{-\gamma x^1}$$

obținem

$$dS^2 = C_{ij}du^i du^j, \quad (i, j = 1, 2)$$

$$[\text{IX}] \quad \Gamma_{11}^1 = x^1, \quad \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2$$

Componentele a_{ij} satisfac sistemul

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2x^1 a_{11} &= 0, & \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + x^1 a_{12} &= 0, & \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + \varepsilon x^2 a_{02} &= 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} &= 0, & \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\varepsilon x^2 a_{22} &= 0\end{aligned}$$

de unde obținem imediat

$$a_{11} = C_{11} e^{-(x^1)^2}, \quad a_{22} = C_{22} e^{-\varepsilon(x^2)^2}, \quad a_{12} = \varphi(x^2) e^{-\frac{1}{2}(x^1)^2}$$

Funcția φ satisface ecuația

$$\varphi' + \varepsilon x^2 \varphi = 0$$

care ne dă prin integrare

$$\varphi = C_{12} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}$$

astfel că avem componentele

$$\begin{aligned}a_{11} &= C_{11} e^{-(x^1)^2} \\ a_{12} &= C_{12} e^{-\frac{1}{2}[(x^1)^2 + \varepsilon(x^2)^2]} \\ a_{22} &= C_{22} e^{-\varepsilon(x^2)^2}\end{aligned}$$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \quad u^2 = \int_0^{x^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} dt$$

$$[X] \quad \Gamma_{11}^1 = x^1 + x^2, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = x^1 + x^2 + \gamma, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \gamma + 1$$

Obținem sistemul

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2(x^1 + x^2) a_{11} + 2a_{12} &= 0, & \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2(x^1 + x^2 + \gamma) a_{11} + 2a_{12} &= 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + (x^1 + x^2 + \gamma) a_{11} + (x^1 + x^2 + 1) a_{12} + a_{22} &= 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + (x^1 + x^2 + \gamma) a_{11} + (x^1 + x^2 + 2\gamma + 1) a_{12} + a_{22} &= 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2(x^1 + x^2 + \gamma) a_{12} + 2a_{22} &= 0, \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2(x^1 + x^2 + \gamma) a_{12} + 2(\gamma + 1) a_{22} &= 0\end{aligned}$$

de unde rezultă ecuațiile cu derivate parțiale

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^2} = 2\gamma a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2)$$

Asociem sistemele caracteristice

$$\frac{dx^1}{1} = \frac{dx^2}{-1} = \frac{da_{ij}}{2\gamma a_{ij}}$$

care ne dau integralele prime

$$x^1 + x^2 = K, \quad a_{ij} = K_{ij} e^{2\gamma x^1}$$

astfel că avem

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(t) e^{2\gamma x^1},$$

unde

$$t = x^1 + x^2$$

funcțiile φ_{ij} satisfăcând sistemul

$$\varphi'_{11} + 2(t + \gamma) \varphi_{11} + 2\varphi_{12} = 0$$

$$\varphi'_{12} + (t + \gamma) \varphi_{11} + (t + 2\gamma + 1) \varphi_{12} + \varphi_{22} = 0$$

$$\varphi'_{22} + 2(t + \gamma) \varphi_{12} + 2(\gamma + 1) \varphi_{22} = 0$$

Dacă

$$\varphi_{11} = K_i \varphi_{11}^i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

atunci rezultă

$$\varphi_{12} = -\frac{1}{2} K_i \varphi_{11}^i - (t + \gamma) K_i \varphi_{11}^i$$

$$\varphi_{22} = \frac{1}{2} K_i \varphi_{11}^i + \left(\frac{3}{2} t + 2\gamma + \frac{1}{2} \right) K_i \varphi_{11}^i + (t^2 + 3\gamma t + 2\gamma^2 + 1) K_i \varphi_{11}^i$$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt

$$\begin{aligned} u^i &= \int_0^{x^1} \varphi_i(t) e^{\gamma t} dt - e^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} \varphi_i'(x^1 + t) dt - \\ &- e^{\gamma x^1} \int_0^{x^2} (x^1 + t + \gamma) \varphi_i(x^1 + t) dt, \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

$$[\text{XI}] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = x^1 + x^2, \quad \Gamma_{12}^2 = x^1 + (1 - \beta) x^2 - \gamma, \quad \Gamma_{22}^2 = \beta x^2 + \gamma$$

Componentele a_{ij} satisfac sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2(x^1 + x^2) \dot{a}_{11} = 0 \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2(x^1 + x^2) a_{11} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + (x^1 + x^2) a_{11} + (x^1 + x^2) a_{12} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + [x^1(1 - \beta) x^2 - \gamma] a_{11} + [x^1 + (1 + \beta) x^2 + \gamma] a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2(x^1 + x^2) a_{12} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2[x^1 + (1 - \beta) x^2 - \gamma] a_{12} + 2(\beta x^2 + \gamma) a_{22} = 0$$

de unde obținem

$$a_{11} = C_{11} e^{-(x^1 + x^2)^2}, \quad a_{12} = k(x^1) e^{-\frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2}$$

funcția k verificând ecuația

$$K^1(x^1) + c_{11}(x^1 + x^2) e^{-\frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2} = 0$$

care ne dă prin integrare

$$K(x^1) = c_{11} e^{-\frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2} + \varphi(x^2)$$

cu

$$\varphi' + (\beta x^2 + \gamma) \varphi = 0,$$

deci

$$\varphi = c_{12} e^{-\frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2 - \frac{1}{2}(\beta x^2)^2 - \gamma x^2}$$

Avem apoi

$$a_{22} = \psi(x^2) + c_{11} e^{-(x^1 + x^2)^2} + 2c_{12} e^{-\frac{1}{2}(x^1 + x^2)^2 - \frac{1}{2}(\beta x^2)^2 - \gamma x^2}$$

unde

$$\psi' + 2(\beta x^2 + \gamma) \psi = 0,$$

deci

$$\psi(x^2) = C_{22} e^{-\beta(x^2)^2 - 2\gamma x^2}$$

Avem astfel componentele

$$a_{11} = C_{11}e^{-(x^1+x^2)^2}$$

$$a_{12} = C_{11}e^{-(x^1+x^2)^2} + c_{12}e^{-\frac{1}{2}(x^1+x^2)^2 - \frac{1}{2}\beta(x^2)^2 - \gamma x^2}$$

$$a_{22} = C_{11}e^{-(x^1+x^2)^2} + 2C_{12}e^{-\frac{1}{2}(x^1+x^2)^2 - \frac{1}{2}\beta(x^2)^2 - \gamma x^2} + c_{22}e^{-\beta(x^2)^2 - 2\gamma x^2}$$

Dacă punem

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \int_0^{x^2} e^{-x^1 t - \frac{(x^1)^2 + t}{2}} dt$$

$$u^2 = \int_0^{x^2} e^{\frac{1}{2}\beta t^2 - \gamma t} dt$$

obținem

$$dS^2 = C_{ij}du^i du^j, \quad (i, j = 1, 2)$$

$$[XII] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = 1$$

Avem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2x^1 a_{11} + 2a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2x^1 a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + 2x^1 a_{12} + a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} - a_{12} + x^1 a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2x^1 a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} - 2a_{22} = 0$$

de unde rezultă

$$a_{22} = \varphi(x^1) e^{2x^1}$$

cu

$$\varphi' + 2x^1 \varphi = 0,$$

deci

$$\varphi = C_{22}e^{-(x^1)^2}$$

Avem apoi

$$a_{12} = [\psi(x^1) - C_{22}x^1 e^{x^2 - (x^1)^2}] e^{x^1}$$

cu

$$\psi' + 2x^1 = 0,$$

deci

$$\psi = C_{12}e^{-(x^1)^2}$$

De asemenea

$$a_{11} = \chi(x^1) - 2x^1 \left[C_{12} e^{x^2 - (x^1)^2} - \frac{1}{2} C_{22} x^1 e^{2x^2 - x^1^2} \right]$$

cu

$$\chi' + 2x^1 \chi = 0,$$

deci

$$\chi = C_{11} e^{-(x^1)^2}$$

Avem deci componentele

$$a_{11} = [C_{11} - 2C_{12} x^1 e^{x^2} + C_{22} (x^1)^2 e^{2x^2}] e^{-(x^1)^2}$$

$$a_{12} = [C_{11} e^{x^2} - C_{22} x^1 e^{2x^2}] e^{-(x^1)^2}$$

$$a_{22} = c_{22} e^{2x^2 - (x^1)^2}$$

Coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian sînt

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt, \quad u^2 = e^{x^2 - \frac{1}{2} (x^1)^2} - 1$$

astfel că

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j, \quad (i, j = 1, 2)$$

$$[\text{XIII}] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 1 + x^1, \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = 1$$

Componentele a_{ij} sînt definite de sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2(1 + x^1) a_{11} + 2a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2(1 + x^1) a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + 2(1 + x^1) a_{12} + a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} - a_{12} + (1 + x^1) a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} - 2(1 + x^1) a_{22} + 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} - 2a_{22} = 0$$

care ne dă

$$a_{22} = C_{22} e^{2x^2 - 2x^1 - (x^1)^2}$$

$$a_{12} = [\psi(x^1) - c_{22}(1 + x^1) e^{x^2 - 2x^1 - (x^1)^2}] e^{x^2}$$

cu

$$\psi' + 2(1 + x^1) \psi = 0$$

deci

$$\psi = C_{12} e^{-2x^1 - (x^1)^2}$$

Avem apoi

$$a_{11} = \chi(x^1) - 2(1 + x^1) \left[C_{12} e^{x^2 - 2x^1 - (x^1)^2} - \frac{1}{2} C_{22} (1 + x^1) e^{2x^2 - 2x^1 - (x^1)^2} \right]$$

cu

$$\chi' + 2(1 + x^1) \chi = 0,$$

deci

$$\chi = c_{11} e^{-2x^1 - (x^1)^2}$$

Rezultă componentele

$$a_{11} = [C_{11} - 2C_{12}(1 + x^1) e^{x^2} + C_{22}(1 + x^1)^2 e^{2x^2}] e^{-2x^1 - (x^1)^2}$$

$$a_{12} = [C_{12} e^{x^2} - C_{22}(1 + x^1) e^{2x^2}] e^{-2x^1 - (x^1)^2}$$

$$a_{22} = C_{22} e^{2x^2 - 2x^1 - (x^1)^2}$$

Dacă punem

$$u^1 = \int_0^{x^1} e^{-t^2 - \frac{1}{2}} dt, \quad u^2 = e^{x^2 - x^1 - \frac{1}{2}(x^1)^2}$$

obținem o metrică cu coeficienți constanți

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j \quad (i, j = 1, 2)$$

$$[XIV] \quad \Gamma_{11}^2 = x^1, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \gamma, \quad \Gamma_{11}^1 = \tau, \quad (\gamma \neq 0)$$

Avem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2x^1 a_{11} + 2\tau a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{11} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \gamma a_{11} + x^1 a_{12} + \tau a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\gamma a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{22} = 0$$

de unde rezultă

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(x^1) e^{-2\gamma x^2}, \quad (i, j = 1, 2)$$

funcțiile φ_{ij} satisfăcând sistemul

$$\varphi'_{11} + 2x^1 \varphi_{11} + 2\tau \varphi_{12} = 0$$

$$\varphi'_{12} + \gamma \varphi_{11} + x^1 \varphi_{12} + \tau \varphi_{22} = 0$$

$$\varphi'_{22} + 2\gamma \varphi_{12} = 0$$

Dacă

$$\varphi_{22} = 2\gamma K_i \varphi_{22}^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

atunci rezultă

$$\varphi_{11} = \frac{1}{\gamma} K_i \varphi_{22}^i + \frac{1}{[\gamma]} x^1 K_i \varphi_{22}^{\prime i} - 2\tau K_i \varphi_{22}^i$$

$$\varphi_{12} = -K_i \varphi_{22}^{\prime i}$$

Coordonatele carteziene ale lui V_2 local euclidian sînt

$$u^i = \psi_i(0) - \psi_i(x^1) e^{-\gamma x^2}, \quad (i = 1, 2)$$

unde ψ_i satisfac ecuația diferențială

$$\psi_i'' + x^1 \psi_i' - \gamma \tau \psi_i = 0$$

$$[XV] \quad \Gamma_{12}^1 = \rho, \quad \Gamma_{22}^2 = \alpha, \quad \Gamma_{22}^1 = \rho(\alpha - \rho) x^1 + \beta x^2 = \gamma \quad (\rho \neq 0)$$

Componentele a_{ij} sînt soluții ale sistemului

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\rho a_{11} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \rho a_{11} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + [\rho(\alpha - \rho) x^1 + \beta x^1 + \beta x^2 + \gamma] a_{11} + (\alpha + \rho) a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\rho a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2[\rho(\alpha - \rho) x^1 + \beta x^2 + \gamma] a_{12} + 2\alpha a_{22} = 0$$

de unde obținem imediat

$$a_{11} = c_{11} e^{-2\rho x^2}, \quad a_{12} = \varphi(x^2) - \rho c_{11} x^1 e^{-\rho x^2} = 0$$

funcția φ satisfăcînd ecuația

$$\varphi' + (\alpha + \rho)\varphi + C_{11}(\beta x^2 + \gamma)e^{-2\rho x^2} = 0$$

a cărei soluție este

$$\varphi = C_{12} e^{-(\alpha+\rho)x^2} - \frac{1}{\alpha-\rho} \left[C_{11}\gamma + C_{11}\beta x^2 - \frac{1}{\alpha-\rho} + C_{11}\rho(\alpha-\rho)x^1 \right] e^{-2\rho x^2}$$

Avem apoi

$$a_{22} = \psi(x^2) - 2\rho C_{12} e^{-(\alpha+\rho)x^2} + \frac{2\rho}{\alpha-\rho} C_{11} \left[(\gamma + \beta x^2) x^1 + \frac{1}{2} \rho(\alpha - \rho) (x^1) - \frac{\beta}{\alpha - \rho} x^1 \right] e^{-2\rho x^2}$$

unde ψ satisface ecuația diferențială

$$\psi' - 2\alpha\psi + 2C_{12}(\beta x^2 + \gamma) e^{-(\alpha+\rho)x^2} = 0$$

a cărei soluție este

$$\Psi = C_{22}e^{-2\alpha x^2} - \frac{2C_{12}}{\alpha - \rho} \left(\gamma + \beta x^2 - \frac{\beta}{\alpha - \rho} \right) e^{-(\alpha+\rho)x^2}$$

Avem deci componentele

$$a_{11} = C_{11}e^{-2\rho x^2}$$

$$a_{12} = c_{12}e^{-(\alpha+\rho)x^2} \frac{C_{11}}{\alpha - \rho} \left[\beta x^2 + \gamma - \frac{\beta}{\alpha - \rho} + \rho(\alpha - \rho) x^1 \right] e^{-\rho x^2}$$

$$a_{22} = c_{22}e^{-2\alpha x^2} - \frac{2}{\alpha - \rho} C_{12} \left(\beta x^2 + \gamma - \frac{\beta}{\alpha - \rho} \right) e^{-(\alpha+\rho)x^2} - 2c_{12}\rho x^1 e^{-(\alpha+\rho)x^2} + \\ + \frac{2\rho}{\alpha - \rho} C_{11}x^1 \left[\beta x^2 + \gamma - \frac{\beta}{\alpha - \rho} + \frac{1}{2} \rho(\alpha - \rho) x^1 \right] e^{-2\rho x^2}$$

Coordonatele carteziene sînt în acest caz

$$u^1 = \left[\frac{\beta(\alpha - 2\rho)}{\rho^2(\alpha - \rho)^2} + \frac{\beta x^2 + \gamma}{\rho(\alpha - \rho)} + x^1 \right] e^{-\rho x^2} - \frac{\beta(\alpha - 2\rho)}{\rho^2(\alpha - \rho)} - \frac{\gamma}{\rho(\alpha - \rho)}$$

$$u^2 = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x^2})$$

$$[\text{XVI}] \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \tau, \quad \Gamma_{22}^1 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^2 = bx^2 + c$$

Obținem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2\tau a_{11} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\tau a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + 2\tau a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + \varepsilon x^2 a_{11} + (bx^2 + c)a_{12} + \tau a_{22} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\tau a_{22} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2\varepsilon x^2 a_{12} + 2(bx^2 + c)a_{22} = 0$$

de unde rezultă imediat

$$a_{ij} = \varphi_{ij}(x^2)e^{-2\tau x^1}; \quad (i, j = 1, 2)$$

Funcțiile φ_{ij} satisfac sistemul

$$\varphi'_{11} + 2\tau \varphi_{12} = 0$$

$$\varphi'_{12} + \varepsilon x^2 \varphi_{11} + (bx^2 + c) \varphi_{12} + \tau \varphi_{22} = 0$$

$$\varphi'_{12} + 2\varepsilon x^2 \varphi_{12} + 2(bx^2 + c) \varphi_{22} = 0$$

Dacă

$$\varphi_{11} = K_i \varphi_{11}^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

atunci rezultă

$$\varphi_{12} = -\frac{1}{2\tau} K_i \varphi_{11}^i$$

$$\varphi_{22} = \frac{1}{2\tau^2} K_i \varphi_{11}^{ii} + \frac{bx^2 + c}{2\tau^2} K_i \varphi_{11}^i - \frac{\varepsilon}{\tau} x^2 K_i \varphi_{11}^i$$

Dacă punem

$$u^i = \varphi_i^{(0)} - \varphi_i(x^2) e^{-\tau x^1}; \quad (i = 1, 2)$$

unde φ_i satisfac sistemul

$$\varphi' + \tau \psi = 0$$

$$\psi' + (bx^2 + c) \psi + \varepsilon x^2 \varphi = 0$$

obținem o metrică cu coeficienți constanți

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j; \quad (i, j = 1, 2)$$

$$[\text{XVII}] \quad \Gamma_{11}^1 = 1, \quad \Gamma_{12}^1 = \gamma, \quad \Gamma_{22}^1 = -\gamma(\varepsilon x^2 - \gamma), \quad \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2$$

Sistemul (2) se scrie în acest caz

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2a_{11} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\gamma a_{11} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \gamma a_{11} + a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} - \gamma(\varepsilon x^2 - \gamma) a_{11} + (\varepsilon x^2 + \gamma) a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\gamma a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} - 2\gamma(\varepsilon x^2 - \gamma) a_{12} + 2\varepsilon x^2 a_{22} = 0$$

Integrînd, obținem succesiv

$$a_{11} = K(x^2) e^{-2x^1}, \quad \text{unde } K' + 2\gamma K = 0, \quad \text{deci } K = C_{11} e^{-2\gamma x^2}$$

Deci $a_{11} = C_{11} e^{-2(x^1 + \gamma x^2)}$. Rezultă apoi ecuația

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + a_{12} + \gamma C_{11} e^{-2(x^1 + \gamma x^2)} = 0$$

care are soluția generală

$$a_{12} = [\varphi(x^2) + \gamma C_{11} e^{-(x^1 + 2\gamma x^2)}] e^{-x^1}$$

unde φ satisface ecuația $\varphi' + (\varepsilon x^2 + \gamma) \varphi = 0$, care are soluția

$$\varphi = C_{12} e^{-\gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2},$$

astfel încît avem

$$a_{12} = [C_{12} e^{-\gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} + \gamma C_{11} e^{-(x^1 + 2\gamma x^2)}] e^{-x^1}$$

Avem apoi ecuația

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\gamma [C_{12} e^{-\gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} + \gamma C_{11} e^{-(x^1 + 2\gamma x^2)}] e^{-x^1} = 0$$

care are soluția generală

$$a_{22} = \psi(x^2) + 2\gamma C_{12} e^{-x^1 - \gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} + \gamma^2 C_{11} e^{-2(x^1 + \gamma x^2)}$$

unde $\psi' + 2\varepsilon x^2 \psi = 0$, deci $\psi = C_{22} e^{-(x^2)^2}$

Avem deci componentele tensorului metric

$$a_{11} = C_{11} e^{-2(x^1 + \gamma x^2)}$$

$$a_{12} = [C_{12} e^{-\gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} + \gamma C_{11} e^{-(x^1 + 2\gamma x^2)}] e^{-x^1}$$

$$a_{22} = C_{22} e^{-(x^2)^2} + 2\gamma C_{12} e^{-x^1 - \gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} + \gamma^2 C_{11} e^{-2(x^1 + \gamma x^2)}$$

Dacă punem

$$du^1 = e^{-(x^1 + \gamma x^2)} (dx^1 + \gamma x^2)$$

$$du^2 = e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} dx^2$$

obținem

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j \quad (i, j = 1, 2)$$

deci

$$u^1 = - e^{-(x^1 + \gamma x^2)}$$

$$u^2 = \int e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} dx^2$$

sînt coordonate carteziene ale lui V_2 .

$$[\text{XVIII}] \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = \varepsilon x^1 + \alpha$$

Obținem sistemul

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} &= 0, & \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\varepsilon x^2 a_{11} &= 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \varepsilon x^2 a_{11} &= 0, & \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} + 2(\varepsilon x^1 + \alpha) a_{12} + 2\varepsilon x^2 a_{22} &= 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\varepsilon x^2 a_{12} &= 0, & \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} + 2(\varepsilon x^1 + \alpha) a_{12} + 2\varepsilon x^2 a_{22} &= 0\end{aligned}$$

de unde rezultă imediat

$$a_{11} = C_{11}e^{-\varepsilon(x^1)^2}, \quad a_{12} = \varphi(x^2) - \varepsilon C_{11}x^1x^2e^{-\varepsilon(x^1)^2} \text{ cu } \varphi' + 2\varepsilon x^2\varphi + \alpha C_{11}e^{-\varepsilon(x^1)^2} = 0$$

care ne dă prin integrare $\varphi = (C_{12} - C_{11}\alpha x^2)e^{-\varepsilon(x^1)^2}$

Deci $a_{12} = (C_{12} - C_{11}\alpha x^2 - \varepsilon C_{11}x^1x^2)e^{-\varepsilon(x^1)^2}$ Rezultă apoi

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\varepsilon x^2(C_{12} - C_{11}\alpha x^2 - \varepsilon C_{11}x^1x^2)e^{-\varepsilon(x^1)^2} = 0$$

de unde obținem

$$a_{22} = -2\varepsilon x^2[C_{12}x^1 - C_{11}\alpha x^1x^2 - C_{11}(x^1)^2x^2]e^{-\varepsilon(x^1)^2} + \Psi(x^2)$$

funcția ψ satisfăcând ecuația diferențială

$$\psi' + 2\varepsilon x\psi + 2\alpha(C_{12} - C_{11}\alpha x^2)e^{-\varepsilon(x^1)^2} = 0$$

care ne dă prin integrare

$$\psi = [C_{11}\alpha^2(x^2)^2 - 2C_{12}\alpha x^2 + C_{22}]e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

astfel încât putem scrie

$$\begin{aligned}a_{22} &= [C_{11}\alpha^2(x^2)^2 - 2C_{12}\alpha x^2 + C_{22} - 2\varepsilon C_{12}x^1x^2 + 2\varepsilon\alpha C_{11}x^1(x^2)^2 + \\ &\quad + C_{11}(x^1)^2(x^2)^2]e^{-\varepsilon(x^1)^2}\end{aligned}$$

Tensorul fundamental are deci componentele

$$a_{11} = C_{11}e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

$$a_{12} = (C_{12} - C_{11}\alpha x^2 - C_{11}\varepsilon x^1x^2)e^{-\varepsilon(x^1)^2}$$

$$\begin{aligned}a_{22} &= [C_{11}\alpha^2(x^2)^2 - 2C_{12}\alpha x^2 + C_{22} - 2\varepsilon C_{12}x^1x^2 + 2\varepsilon\alpha C_{11}x^1(x^2)^2 + \\ &\quad + C_{11}(x^1)^2(x^2)^2]e^{-\varepsilon(x^1)^2}\end{aligned}$$

Se arată ușor că dacă punem

$$du^1 = [dx^1 - x^2(\alpha + \varepsilon x^1) dx^2] e^{-\varepsilon(x^2)^2}$$

$$du^2 = e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} dx^2$$

obținem o metrică cu coeficienți constanți

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j; \quad (i, j = 1, 2)$$

deci u^1, u^2 , dați de formulele de mai sus, constituie coordonatele carteziene ale spațiului V_2 local euclidian.

$$[\text{XIX}] \quad \Gamma_{11}^1 = 1, \quad \Gamma_{12}^1 = \varepsilon x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = -\varepsilon(\gamma x^2 + 1), \quad \Gamma_{22}^2 = \varepsilon x^2 + \gamma$$

Avem sistemul

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} + 2a_{11} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} + 2\varepsilon x^2 a_{11} = 0$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + \varepsilon x^2 a_{11} + a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} - \varepsilon(\gamma x^2 + 1) a_{11} + (2\varepsilon x^2 + \gamma) a_{12} = 0$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\varepsilon x^2 a_{12} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} - 2\varepsilon(\gamma x^2 + 1) a_{12} + 2(\varepsilon x^2 + \gamma) a_{22} = 0$$

Obținem $a_{11} = K(x^2) e^{-2x^2}$, unde $K' + 2\varepsilon x^2 K = 0$ care ne dă prin integrare $K = C_{11} e^{-\varepsilon(x^2)^2}$, deci $a_{11} = C_{11} e^{-2x^1 - \varepsilon(x^2)^2}$

Avem apoi

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} + a_{12} + C_{11} \varepsilon x^2 e^{-2x^1 - \varepsilon(x^2)^2} = 0$$

de unde

$$a_{12} = \left[\varphi(x^2) + \frac{1}{2} C_{11} e^{-2x^1 - \varepsilon(x^2)^2} \right] e^{-x^1}$$

unde funcția φ satisface ecuația diferențială $\varphi' + (2\varepsilon x^2 + \gamma) \varphi = 0$, care ne dă $\varphi = C_{12} e^{-\gamma x^2 - \varepsilon(x^2)^2}$ astfel încît putem scrie

$$a_{12} = \left(C_{12} e^{-\gamma x^2} + \frac{1}{2} C_{11} e^{-x^1} \right) e^{-x^1 - \varepsilon(x^2)^2}$$

Rezultă apoi ecuația

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} + 2\varepsilon x^2 \left(C_{12} e^{-\gamma x^2} + \frac{1}{2} C_{11} e^{-x^1} \right) e^{-x^1 - \varepsilon(x^2)^2} = 0$$

care ne dă

$$a_{22} = \Psi(x^2) + 2\varepsilon x^2 C_{12} e^{-x^1 - \gamma x^2 - \varepsilon(x^2)^2} + \frac{\varepsilon}{2} C_{11} x^2 e^{-2x^1 - \varepsilon(x^2)^2}$$

unde φ satisface ecuația

$$\psi' + 2(\varepsilon x^2 + \gamma)\psi = 0, \text{ de unde } \psi = C_{22}e^{-2\gamma x^2 - \varepsilon(x^2)^2}$$

astfel încît avem pentru tensorul fundamental componentele

$$a_{11} = C_{11}e^{-2x^1 - \varepsilon(x^2)^2}$$

$$a_{12} = \left(C_{12}e^{-\gamma x^2} + \frac{1}{2} C_{11}e^{-x^1} \right) e^{-x^1 - \varepsilon(x^2)^2}$$

$$a_{22} = C_{22}e^{-\varepsilon(x^2)^2 - 2\gamma x^2} + 2\varepsilon x^2 C_{12}e^{-x^1 - \gamma x^2 - \varepsilon(x^2)^2} + \frac{\varepsilon}{2} x^2 C_{11}e^{-2x^1 - \varepsilon(x^2)^2}$$

Dacă punem

$$u^1 = -e^{-x^1 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2}$$

$$u^2 = \int e^{-\gamma x^2 - \frac{\varepsilon}{2}(x^2)^2} dx^2$$

obținem

$$dS^2 = C_{ij} du^i du^j; (i, j = 1, 2)$$

deci u^1, u^2 sînt coordonate carteziene ale spațiului V_2 local euclidian.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Cartan, La géométrie des espaces de Riemann. Mémorial des sciences Mathématiques, IX, 54 (1952)
2. P. Mocanu, Asupra spațiilor cu conexiune afină constantă A_3 local euclidiene. Comunicările Acad. R.P.R. tom. I. 1951, nr. 3.
3. T. Postelnicu, Spații A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene, Revista Universității „C. I. Parhon”. București 4—5, 1954, p. 101—131.
4. C. Teleman, Spații local euclidiene, Studii și Cercetări matematice 1964.
5. Ion D. Teodorescu, Studiul unor spații local euclidiene cu conexiune polinomială. Lucrare de dizertație, Fac. Mat-Mec. Univ. București 1964.
6. Gh. Vrănceanu, Leçons de Géométrie Différentielle, vol. II, 1962.
7. Gh. Vrănceanu, Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiune constantă. St. cerc. mat., XIII, 2. (1962).
8. Gh. Vrănceanu, Proprietăți globale ale spațiilor lui Riemann cu conexiune afină constantă. St. cerc. mat., XIII, 4 (1962R).
9. M. Stoka: „Asupra spațiilor riemanniene cu metrică nedefinită, cu curbura constantă” Studii și cerc. matematice, XIV, 4 (1963), p. 599—614.
10. V. Dumitraș: Determinarea spațiilor cu conexiune afină constantă” Bul. Acad. militare generale, București, nr. 4, 1965, 6 pag.

Primită la 24.II. 1970

Institutul politehnic București

РИМАНОВЫ ЛОКАЛЬНО ЕВКЛИДОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА V_2 С ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Краткое содержание

Использую одну теорему, доказанную доцентом Tiberiu Postelnicu, о приведении к канонической форме связи локально евклидовых пространств A_2 с аффинной линейной V_2 связностью, автор определяет римановы локально евклидовые пространства V_2 с линейной связностью.

ESPACES RIEMANNIENS V_2 À CONNEXION LINÉAIRE LOCALEMENT EUCLIDIENS

Résumé

En utilisant un théorème démontré par Tiberiu Postelnicu relativement à la réduction une forme canonique de la connexion des espaces A_2 à connexion affine linéaire localement euclidiennes, on détermine les espaces riemanniens V_2 à connexion linéaire localement euclidiens.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

DISTRIBUȚII PARALELE PE VARIETĂȚI CU CONEXIUNE AFINĂ

STERE IANUȘ

G. Vrănceanu a introdus în 1925 spațiile neolonyme și astăzi există o literatură bogată legată de studiul acestor spații.

Mai tirziu G. Walker, J. Willmore, K. Yano și alții au studiat structurile aproape produs pe varietăți cu conexiune afină. Din punct de vedere local, o structură aproape produs neintegrabilă înseamnă două spații neolonyme complementare în sensul lui G. Vrănceanu [5] [6] [9] G. Vrănceanu și J. Schouten au introdus anumite conexiuni speciale pentru spațiile neolonyme complementare.

În această lucrare vom pune în evidență câteva proprietăți globale ale acestor conexiuni și pentru cazul special al spațiului fibrat tangent, vom arăta legătura lor cu liftul orizontal al unei conexiuni introdus de K. Yano și S. Ishihara.

1. Fie M o varietate diferențiabilă n -dimensională, $\mathfrak{X}(M)$ spațiul câmpurilor de vectori și $C^\infty(M)$ algebra funcțiilor de clasă C^∞ pe M . Toate aplicațiile pe care le vom considera le presupunem de clasă C^∞ .

O conexiune afină ∇ pe varietatea M este o lege care asociază unui câmp de vectori $X \in \mathfrak{X}(M)$, o aplicație liniară ∇_X , a lui $\mathfrak{X}(M)$, considerat ca spațiu vectorial, care satisface următoarele două condiții [3]

$$\nabla_{fX + gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (1.1)$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (1.2)$$

O distribuție diferențială D de dimensiune r ($0 < r < n$) pe varietatea M este o aplicație diferențiabilă $x \rightarrow D_x(M)$ astfel că $D_x(M)$ este un subspațiu pe dimensiune r a spațiului tangent în punctul $x \in T_x(M)$.

Se spune că un câmp de tensori P pe tipul $(1,1)$ definește o structură aproape produs pe varietatea M , dacă pentru orice $x \in M$ tensorul P_x este un endomorfism involutiv al spațiului tangent $T_x(M)$. Dacă se notează cu I câmpul de tensori Kronecker avem relația

$$P^2 = I \quad (1.3)$$

În acest caz varietatea M posedă două distribuții D și D' complementare, adică spațiul tangent $T_x(M)$, pentru orice $x \in M$ se descompune în suma directă a subspațiilor D_x și D'_x . Notînd cu V și V' cîmpurile de tensori proiectori asociați celor două distribuții, vom avea relațiile

$$VV' = V'V = 0, \quad V + V' = I, \quad V^2 = V, \quad V'^2 = V' \quad (1.4)$$

Vom spune că un cîmp de vectori X aparține distribuției D dacă pentru orice punct $x \in M$ avem $X_x \in D_x(M)$. O distribuție D se numește paralelă față de conexiunea ∇ , dacă pentru orice cîmp de vectori X care aparține distribuției, cîmpul de vectori $\nabla_X X$ aparține distribuției, oricare ar fi cîmpul de vectori Y , $Y \in X(M)$.

2. Presupunem acum că varietatea diferențiabilă M este înzestrată cu o conexiune afină ∇ și o structură aproape produs P . Noi definim conexiunile afine $\bar{\nabla}$ și $\tilde{\nabla}$ prin formulele următoare:

$$\bar{\nabla}_X Y = V \nabla_X VY + V' \nabla_X V'Y \quad (2.1)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = V \nabla_{VX} VY + V' \nabla_{V'X} V'Y + V[V'X, VY] + V'[VX, V'Y] \quad (2.2)$$

Ținînd seama de (1.4) se verifică ușor condițiile (1.1) și (1.2) ale unei conexiuni afine.

Propoziția 2.1. Distribuțiile structurii aproape produs P sînt paralele față de conexiunile $\bar{\nabla}$ și $\tilde{\nabla}$ date de formulele (2.1) și (2.2) oricare ar fi conexiunea ∇ .

Demonstrație. Fie Y un cîmp din distribuția D a structurii aproape produs P . Atunci $V'Y = 0$ și din formulele (2.1), și (2.2) rezultă că avem

$$V' \bar{\nabla}_X Y = 0 \quad V' \tilde{\nabla}_X Y = 0 \quad (2.3)$$

pentru orice cîmp de vectori X pe varietatea M .

Propoziția 2.2. Conexiunea $\bar{\nabla}$ este egală cu conexiunea ∇ dacă și numai dacă distribuțiile structurii aproape produs P sînt paralele față de conexiunea ∇ .

Demonstrație. Dacă conexiunile $\bar{\nabla}$ și ∇ sînt egale rezultă din (2.1) că avem

$$V \nabla_X V'Y + V' \nabla_X VY = 0 \quad (2.4)$$

Ținînd seama de (1.4) rezultă

$$V \nabla_X V'Y = 0, \quad V' \nabla_X VY = 0 \quad (2.5)$$

Ultimele relații arată că distribuțiile lui P sînt paralele față de conexiunea ∇ . Reciproca rezultă deasemeni ușor.

Teorema 2.3. Fie o varietate diferențiabilă M cu structura aproape produs P și o conexiune afină ∇ . Atunci formulele (2.1) și (2.2) definesc pe varietatea M două conexiuni $\bar{\nabla}$ și $\tilde{\nabla}$. Dacă cel puțin una din conexiunile $\bar{\nabla}$ și $\tilde{\nabla}$ este simetrică structura aproape produs P este integrabilă.

Demonstrație. Structura P este integrabilă dacă avem satisfăcute relațiile care exprimă faptul că distribuțiile D și D' sînt involutive.

$$V'[VX, VY] = 0, \quad V[V'X, V'Y] = 0 \quad (2.6)$$

Dacă conexiunea $\bar{\nabla}$ este simetrică avem

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y] \quad (2.7)$$

Prima relație din (2.6) se va scrie

$$V' \bar{\nabla}_{VX} VY - V' \bar{\nabla}_{VY} VX = 0 \quad (2.8)$$

Ultima relație este satisfăcută datorită propoziției 2.1. Cu aceasta teorema este demonstrată.

3. Fie TM spațiul tangent al varietății M și $\pi: TM \rightarrow M$ proiecția canonică. Putem considera atunci aplicația

$$\pi_*: TTM \rightarrow TM$$

unde TTM este spațiul fibrat tangent peste TM și π_* este diferențiala aplicației π . Nucleul aplicației π_* în fiecare punct $Z \in TM$ este un subspațiu n -dimensional VTM_Z a lui TM_Z și distribuția corespunzătoare pe TM se numește distribuția verticală a lui TM . Conexiunea afină ∇ a varietății determină o distribuție n -dimensională HTM pe varietatea TM numită distribuția orizontală a conexiunii ∇ [1]. Cele două distribuții sînt complementare. Fie K aplicația definită prin următoarea formulă [1]

$$KY_*(X_x) = \nabla_{X_x} Y, \quad Y \in X(M), \quad X_x \in T_x(M) \quad (3.1)$$

unde Y_* este diferențiala cîmpului Y considerat ca o secțiune a lui TM .

Liftul vertical și liftul orizontal al unui cîmp de vectori X dat pe varietatea M sînt cîmpurile de vectori X^v și X^h pe varietatea TM definite prin următoarele formule [1] [4]

$$\begin{aligned} KX^v &= X, & \pi_* X^v &= 0 \\ KX^h &= 0, & \pi_* X^h &= X \end{aligned} \quad (3.2)$$

În lucrarea [4] s-a definit o structură aproape produs P pe varietatea TM prin formulele

$$\pi_* \cdot P = K, \quad K \cdot P = \pi_* \quad (3.3)$$

K. Yano și S. Ishihara au definit liftul orizontal ∇^h al conexiunii ∇ ca fiind o conexiune afină pe TM definită prin formulele următoare

$$\begin{aligned}\nabla_{X^h}^h Y^h &= (\nabla_X Y)^h, & \nabla_{X^h}^k Y^v &= (\nabla_X^h Y)^v \\ \nabla_{X^v}^h Y^h &= 0, & \nabla_{X^v}^h Y^v &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Teorema 3.1. Distribuțiile structurii aproape produs P sînt paralele față de liftul orizontal ∇^h al conexiunii ∇

Demonstrație. Tensorii proiectorii celor două distribuții ale structurii P sînt dați de formulele [10]

$$\bar{P} = \frac{1+P}{2}, \quad \overline{\bar{P}} = \frac{1-P}{2} \quad (3.5)$$

Din formulele (3.2) și (3.3) rezultă că avem

$$PX^h = X^v \quad \text{și} \quad PX^v = X^h \quad (3.6)$$

Folosind formulele (3.4) (3.5) și (3.6) rezultă afirmația teoremei.

Corolar [4] Structura aproape produs P a varietății TM este integrabilă dacă și numai dacă varietatea M este local euclidiană.

Este cunoscut faptul că liftul orizontal ∇^h al unei conexiuni afine ∇ este o conexiune simetrică dacă și numai dacă conexiunea este local euclidiană [8]. Folosind acest lucru cunoscut și teorema precedentă rezultă afirmația din corolar.

Propoziția 3.2. Fie M o varietate diferențiabilă cu conexiunea afină ∇ și P structura aproape produs a varietății TM dată de formulele (3.3). Conexiunea $\bar{\nabla}$ asociată structurii aproape produs P și liftului orizontal ∇^h este o conexiune pe TM egală cu ∇^h

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că avem relațiile

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X^h} Y^h &= \nabla_{X^h}^h Y^h, & \bar{\nabla}_{X^v} Y^h &= \nabla_{X^v}^h Y^h \\ \bar{\nabla}_{X^h} Y^v &= \nabla_{X^h}^h Y^v, & \bar{\nabla}_{X^v} Y^v &= \nabla_{X^v}^h Y^v\end{aligned}\quad (3.7)$$

Mai întii observăm că avem

$$\bar{P}X^h = \frac{X^h + X^v}{2}, \quad \bar{P}X^v = \frac{X^h - X^v}{2} \quad (3.8)$$

Pentru prima relație din (3.7) avem

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{x^h} Y^h &= \bar{P} \nabla_{x^h}^h \bar{P} Y^h + \bar{\bar{P}} \nabla_{x^h}^h \bar{\bar{P}} Y^h = \frac{\bar{P}}{2} (\nabla_{x^h}^h Y^h + \nabla_{x^h}^h Y^v) + \\ &+ \frac{\bar{\bar{P}}}{2} (\nabla_{x^h}^k Y^h - \nabla_{x^h}^h Y^v)\end{aligned}$$

Folosind definiția liftului orizontal și (3.8) rezultă prima relație din (3.7). Celelalte relații se deduc în mod analog.

4. Vrem să arătăm acum că din punct de vedere local conexiunile (2.1) și (2.2) coincid cu conexiunile date de G. Vrăncianu și J. Schouten pentru două spații neolome complementare [6].

Să considerăm pe varietatea M două sisteme de congruență complementare (independente).

$$\begin{aligned}ds^a &= \lambda_i^a dx^i & a &= 1, \dots, m \\ & & i &= 1, \dots, n, \quad 0 < m < n\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$ds^{a'} = \lambda_i^{a'} dx^i \quad a' = m+1, \dots, n$$

Sistemele de ecuații

$$ds^a = 0, \quad ds^{a'} = 0$$

definesc două spații neolome complementare.

Fie (μ_h^i) parametrii congruențelor legați de funcțiile (λ_i^h) prin formulele:

$$\mu_h^i \lambda_j^h = \delta_j^i \quad \mu_h^i \lambda_i^h = \delta_n^h \quad h, k = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Vom considera câmpurile de vectori $(X_a, X_{a'})$ prin formulele

$$X_a = \mu_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{a'} = \mu_{a'}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.3)$$

Fie ∇ o conexiune afină pe varietatea M și Γ_{jk}^i coeficienții de conexiune dați de formulele

$$\frac{\nabla}{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (4.4)$$

Ținând seama de proprietățile (1.1) și (1.2) ale conexiunii rezultă

$$\nabla_{X_k} X_h = \left(\frac{\partial \mu_h^i}{\partial x^j} \mu_k^j - \Gamma_{rj}^{i'} \mu_h^r \mu_k^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.5)$$

Pe de altă parte componentele γ_{kl}^h ale conexiunii ∇ pe congruențe se scriu astfel [6]

$$\gamma_{kl}^h = \left(\frac{\partial \lambda_i^h}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^s \lambda_s^h \right) \mu_k^{i'} \mu_l^j \quad (4.6)$$

Dacă în (4.5) ținem seama de (4.6) obținem

$$\nabla_{X_k} X_h = -\gamma_{hk}^{e'} X_e \quad h, k, e = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

Definim proiectorii V și V' pentru cele două sisteme de congruențe (4.1) prin formulele următoare

$$VX_a = X_a, \quad VX_{a'} = 0, \quad V'X_a = 0, \quad V'X_{a'} = X_{a'} \quad (4.8)$$

Coeficienții conexiunilor $\bar{\nabla}$ și $\tilde{\nabla}$ pe sistemul de congruențe ales îi notăm cu $\bar{\gamma}_{kl}^h$ și $\tilde{\gamma}_{kl}^h$

Din formulele (2.1), (2.2), (4.7), și (4.8) rezultă formulele următoare ([6], p. 213).

$$\bar{\gamma}_{bc}^a = \gamma_{bc}^a, \quad \bar{\gamma}_{bc'}^{a'} = \gamma_{bc'}^{a'}, \quad \bar{\gamma}_{b'h}^{a'} = 0 \quad (4.9)$$

$$\bar{\gamma}_{b'}^{a'} = \gamma_{b'}^{a'}, \quad \bar{\gamma}_{b'c}^a = \gamma_{b'c}^a, \quad \bar{\gamma}_{bh}^{a'} = 0$$

$$\tilde{\gamma}_{bc}^a = \gamma_{bc}^a, \quad \tilde{\gamma}_{bc'}^{a'} = w_{bc'}^{a'}, \quad \tilde{\gamma}_{b'h}^{a'} = 0 \quad (4.10)$$

$$\tilde{\gamma}_{b'c'}^{a'} = \gamma_{b'c'}^{a'}, \quad \tilde{\gamma}_{b'c}^a = w_{b'c}^a, \quad \tilde{\gamma}_{bh}^{a'} = 0$$

unde w_{kl}^h sînt covarianții biliniari ai sistemului de congruențe (4.1). Aceste formule reprezintă conexiunile date de G. Vranceanu și J. Schouten pentru două spații neolonyme complementare.

BIBLIOGRAFIE

- [1] P. D o m b r o v s k i, — On geometry of the tangent bundle, J. Reine und Angew. Math 210 1962, p. 73—88.
- [2] A. G r a y — Pseudo-Riemannian almost product manifolds und submersions J. Math. and Mech. 16, 1967, p. 715—738
- [3] S. H e l g a s o n. Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, 1962.

- [4] S. Ianuș și C. Udriște, Aupra spațiului fibrat tangent al unei varietăți diferențiabile. Studii și cercetări matematice, nr. 4, 1970 p. 599—611.
- [5] G. Vrănceanu—Les espaces non holonomes. Memn. des Sc. Math. 76, 1936
- [6] G. Vrănceanu, Lecții de geometrie diferențiată vol. I, II Editura Didactică și Pedagogică 1962, 1964.
- [7] G. Walker, Connexions for parallel distributions in the large I, II, quart. J. Math. Oxford 6 (1955), p. 301—308; 9 (1958) p. 221—231
- [8] K. Yano și S. Jshihara, Horizontal lifts of tensor fields and coconnections to tangent bundles, J. Math. and Mech. 16 (1967), 0, p. 1015—1030.
- [9] K. Yano et St. Petrescu, Sur les espaces metrique non holonomes complementaires, Disquisitiones mathematical et physical, Tom. I. fas. I. 1940.
- [10] K. Yano, Differential Geometry on complex and almost complex spaces, Pergamon Press, 1965.

Primită la 7 VI. 1970.

Universitatea București
Facultatea de matematică-mecanică

SUR LES DISTRIBUTIONS PARALLÈLES SUR LES VARIÉTÉS À CONEXION AFFINE

R e s u m é

On étudie deux connexions affines spéciales sur une variété différentiable à structure presque produit.

Dans le cas de l'espace fibré tangent, on montre la liaison avec le lift horizontal de la connexion.

L'ÉTUDE DE LA RÉDUCTIBILITÉ DES OPÉRATEURS INFINITÉSIMAUX ASSOCIÉS AUX ALGÈBRES DE JORDAN SIMPLES

RADU IORDĂNESCU

Il y a plusieurs années que, pendant une discussion entre les profs. Gr. C. Moisil et G. Vrânceanu, a été indiquée une méthode simple, développée ultérieurement par le prof. G. Vrânceanu [7], par laquelle on peut associer à chaque algèbre réelle finie un espace à connexion affine constante, en prenant comme composantes de la connexion associée, les constantes de structures de l'algèbre.

Dans ce travail on traite le problème de la réductibilité des opérateurs infinitésimaux X_{kl} du tenseur de courbure donné par la connexion associée aux formes réelles de Jordan des types A, B, C. On étudie les opérateurs X_{kl} , mettant en évidence les propriétés des opérateurs $M_{kl} \left(X_{kl} = (M_{kl})^i_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$, en tenant compte de l'analogie entre le système complet des opérateurs d'un groupe de Lie et l'algèbre de Lie associée [8]. À cette occasion on met en évidence une liaison étroite entre les propriétés de ces opérateurs et les propriétés de certains groupes de Lie simples (unimodulaires pour le type A, orthogonaux pour le type B ou symplectiques pour le type C).

Les graduations spéciales de Lie [4] ont un rôle subordonné, intervenant dans l'expression du tenseur de courbure, conformément aux propriétés de dualité démontrées (théorèmes 1 et 2).

Considérons les formes réelles de Jordan de type A. On sait [2], [6], qu'il existe une dualité entre les formes réelles de Jordan et de Lie de type A.

$$R_{nJ} \rightleftharpoons R_{nL}, \quad \square (Q \otimes R_n)_J \rightleftharpoons (Q \otimes R_n)_L, \quad J(n, p) \rightleftharpoons L(n, p).$$

R_n désignant, comme d'habitude, l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n et Q l'algèbre réelle des quaternions.

Soient $\mathfrak{A}_J \rightleftharpoons \mathfrak{A}_L$ deux telles algèbres duales et soient $\{e_k\}, \{e'_k\}$ deux bases duales.

Si $\mathfrak{A}_J$ et $\mathfrak{A}_L$ sont de type A_I , alors $e_k = e'_k$.

Si $\mathfrak{A}_J$ et $\mathfrak{A}_L$ sont de type A_{II} , alors $e_k = ie'_k$ ($i^2 = -1$).

Soient $\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk}^{'i}$ les constantes de structure des algèbres $\mathfrak{A}_I$ resp. $\mathfrak{A}_L$ dans les bases choisies, et c_{jk}^i les constantes de structure de l'algèbre $\mathfrak{A}$ dans la base $\{e_k\}$.

On peut établir aisément [2], [6] le :

Théorème 1. Γ_{jk}^i et $\Gamma_{jk}^{'i}$ étant considérées les composantes de deux connexions constantes et Γ_{jkl}^i les composantes du tenseur de courbure de la connexion Γ_{jk}^i , nous avons

$$\Gamma_{jkl}^i = \pm \frac{1}{4} \Gamma_{jp}^i \Gamma_{kl}^{'p} \begin{cases} - \text{pour le type } A_I \\ + \text{pour le type } A_{II} \end{cases} \quad (1)$$

Considérons les formes réelles de Jordan de types B, C [3] et donnons un analogue du théorème 1 pour ces dernières.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur R ou Q et $\varphi: V \times V \rightarrow C$ (C — le corp complexe) une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique, hermitienne ou antihermitienne nondégénérée. La forme φ définit une forme réelle de Jordan S et une forme réelle de Lie S' [3], que nous dénommerons la duale de S ,

$S = \{X \mid X \text{ sym. (herm.) par rapport à } \varphi\}$,

$S' = \{X \mid X \text{ antisym. (antiherm.) par rapport à } \varphi\}$,

tel que $S \oplus S' = R_n$ ou $S \oplus S' = Q \otimes R_n$. Soit $\{e_k\}$ une base pour R_n (ou $Q \otimes R_n$), les constantes de structure étant c_{jk}^i , de manière que $\{e_k\}_{k \in M}$ soit une base pour S et $\{e_k\}_{k \in M'}$ soit une base pour S' . Alors, Γ_{jk}^i étant les constantes de structure de S dans la base choisie et $\Gamma_{jk}^{'i}$ les constantes de structure de R_{nL} ou $(Q \otimes R_n)_L$ dans la base $\{e_k\}$, le théorème 1 nous donne le

Théorème 2. Γ_{jkl}^i étant les composantes du tenseur de courbure de S , nous avons :

$$\Gamma_{jkl}^i = - \frac{1}{4} \sum_{p \in M'} \Gamma_{jp}^i \Gamma_{kl}^{'p} \quad (2)$$

Notons, pour tous les types A, B, C, par M_k la matrice ayant les éléments $(M_k)_j^i = \Gamma_{jk}^{'i}$ (pour le type A : $i, j \in \Gamma$; pour le type B : $i, j \in \Gamma_1$ pour le type C : $i, j \in \Gamma_3$), et par M_{kl} la matrice ayant les éléments $(M_{kl})_j^i = \Gamma_{jkl}^i$; (pour le type A : $i, j, k, l \in \Gamma$; pour le type B : $i, j, k, l \in \Gamma_1$ pour le type C : $i, j, k, l \in \Gamma_3$).

Le système M_{kl} définit le système d'opérateurs infinitésimaux

$$X_{kl} = (M_{kl})_j^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Nous étudierons les opérateurs X_{kl} , mettant en évidence les propriétés des opérateurs M_{kl} , en tenant compte de l'analogie entre le système complet d'opérateurs d'un groupe de Lie et l'algèbre de Lie associée [8].

Soit C_n l'algèbre des matrices complexes d'ordre n et C_n' le sous-espace des matrices à trace nulle.

Supposons que les opérateurs M_k et M_{kl} actionnent dans C_n . Dans ces conditions il en résulte un traitement simultané des types B_I et B_{II} (resp. C_I et C_{II}). En effet, considérons, par exemple, deux formes réelles de Jordan

de la même dimension, une de type B_I et l'autre du type B_{II} , elles nous donnent, par la complexification, des algèbres de Jordan de type B isomorphes.

On sait [4] qu'étant donnée une algèbre de Jordan spéciale S , donc une sous-algèbre d'une $\mathcal{A}_J$ ($\mathcal{A}$ associative sur K commutatif), une graduation spéciale de S a été définie de la manière suivante: soit $\mathcal{A}(S)$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ générée par S et $\mathcal{Q} = \{\Gamma, B, \theta\}$, où $B = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, une graduation maximale [6]. (qui a tous les termes de la somme unidimensionnels) de $\mathcal{A}(S)$; supposant qu'il existe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ tel que $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_0}$ soit une base pour S alors la décomposition $S = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_0} K e_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Gamma - \Gamma_0} V_\alpha \right)$ où $V_\alpha = \{0\}$ nous donne une graduation spéciale de S , notée par $(\mathcal{Q}_J, \Gamma_0)$.

Soit $\mathcal{Q}_J$ une graduation maximale d'une forme réelle de Jordan de type A (resp. $(\mathcal{Q}_J, \Gamma_0)_{\Gamma_0 = \Gamma_1 \text{ ou } \Gamma_3}$ une graduation spéciale d'une forme réelle de Jordan de type B ou C), où $\mathcal{Q} = \{\Gamma, B, \theta\}$ est la graduation associative d'où provient $\mathcal{Q}_J$. On établit aisément les formules:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \delta_{j+k}^i [\theta(j, k) - \theta(k, j)]$$

$$\Gamma_{jkl}^i = \pm \frac{1}{4} \delta_{j+k+l}^i [(\theta(j, k+l) - \theta(k+l, j))(\theta(k, l) - \theta(l, k))]. \quad (3)$$

Lemme 1. (pour le type A_I)*) $\mathcal{A}^{[v]} \text{ et } \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{[v-1]}$ ont la propriété suivante: quel que soit $a \in \mathbb{Z}_2^{2v}$, $a \neq 0$, il existe $k, l \in \mathbb{Z}_2^{2v}$, tel que $k+l=a$ et $\theta(k, l) = \theta(l, k)$.

Démonstration. Si deux graduations maximales vérifient le lemme, alors leur produit tensoriel le vérifie aussi. (On tient compte de la définition de θ pour le produit tensoriel [6]). Il nous reste donc de montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont la propriété énoncée par le lemme, ce qu'on peut vérifier aisément.

Lemme 2. (pour le type B). Quel que soit $a \in \Gamma_2$, $a \neq 0$ il existe $k, l \in \Gamma_1$ tel que $k+l=a$.

Démonstration. Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2v-1}, a_{2v}) \in \Gamma_2$, donc $a_1 a_2 + \dots$ impair. Il existe donc i tel que $a_{2i-1} a_{2i} = 1$. Donc $a_{2i-1} = a_{2i} = 1$. Supposons que ces composantes égales à l'unité sont les premières deux, donc: $a_1 = a_2 = 1$. Alors, il faut prendre $k = (1, 0, \dots, 0)$ et $l = (0, 1, a, \dots, a_2)$. C'est évident que $k, l \neq 0$, $k, l \in \Gamma_1$ et $k+l=a$.

D'une manière analogue, on démontre le

Lemme 3. (pour le type C). Quel que soit $a \in \Gamma_4$, $a \neq 0$, il existe $k, l \in \Gamma_3$, tel que $k+l=a$.

Lemme 4. (pour les types B et C). Soit $\Gamma_0 = \Gamma_1$ ou Γ_3 et $i, j \in \Gamma_0$, $i, j, i+j \neq 0$. Alors: $i+j \in \Gamma_0$ si et seulement si $\theta(i, j) = \theta(j, i)$.

Démonstration. Si $i+j \notin \Gamma_0$ alors $e_i \cdot e_j = \frac{1}{2} [\theta(i, j) + \theta(j, i)] e_{i+j} = 0$, donc $\theta(i, j) = -\theta(j, i)$.

*) Un lemme similaire est valable aussi pour le type A_{II} [5]

Si $i + j \in \Gamma_0$, alors e_i, e_j, e_{i+j} sont symétriques et donc nous avons

$$e_i e_j = \theta(i, j) e_{i+j} \rightarrow e_j^+ e_i^+ = \theta(i, j) e_{i+j} \Rightarrow e_i e_j = \theta(i, j) e_{i+j}$$

Mais $e_j e_i = \theta(j, i) e_{i+j}$, donc $\theta(i, j) = \theta(j, i)$.

q.e.d.

Nous avons

$$(M_k)_j^i = \delta_{j+k}^i [\theta(j, k) - \theta(k, j)]$$

et la deuxième formule (3) nous donne

$$M_{kl} = \pm \frac{1}{4} M_{k+l} [\theta(k, l) - \theta(l, k)] \quad (4)$$

Donc les opérateurs M_{kl} associés au tenseur de courbure d'une forme réelle de Jordan de type A, B, C s'expriment, par la formule (4), à l'aide des opérateurs M_{k+l} associés à la connexion de la forme de Lie duale.

Nous nous posons le problème d'inverser les formules (4).

Dans le cas du type A_1 , cf. au lemme 1, $a \in Z_2^2$ étant donné, nous pouvons trouver $k, l \in Z_2^2$ tel que $\theta(k, l) - \theta(l, k) \neq 0$. Donc, a étant donné, nous pouvons exprimer M_a à l'aide de M_{kl} .

Dans le cas du type B ou C, cf. au lemme 4, k et l appartenant à Γ_0 (Γ_1 resp. Γ_3), nous avons $\theta(k, l) - \theta(l, k) \neq 0$ si et seulement si $k + l \in \Gamma_2$, resp. $k + l \in \Gamma_4$. Donc les opérateurs M_{kl} sont non nuls si et seulement si $k + l \in \Gamma_2$ (pour le type B) ou $k + l \in \Gamma_4$ (pour le type C).

Par conséquent, les opérateurs M_{kl} s'expriment à l'aide des opérateurs M_a avec $a \in \Gamma_2$ (resp. Γ_4).

Conformément au lemme 2, resp. 3, $a \in \Gamma_2$ (resp. Γ_4) étant donné, nous pouvons trouver $k, l \in \Gamma_1$ (resp. Γ_3), tel que $a = k + l$. Mais, cf. au lemme 4, il résulte $\theta(k, l) - \theta(l, k) \neq 0$.

Donc $a \in \Gamma_2$ (resp. Γ_4) étant donné nous pouvons exprimer M_a à l'aide des M_{kl} .

En conséquence, nous avons prouvé que, au point de vue de la réductibilité, le système des opérateurs M_{kl} associés au tenseur de courbure des formes réelles de Jordan des types A, B ou C est équivalent au système des opérateurs M_a associés à la connexion de la forme de Lie duale.

Théorème 3 (pour le type A_1). Le système des opérateurs M_{kl} est équivalent (au point de vue de la réductibilité) au système des opérateurs définis par la représentation adjointe de la forme réelle de Lie duale.

Démonstration. En effet, c_{jk}^i étant les constantes de structures de R_n ou $Q \otimes R_n$ dans la base $\{e_i\}$, nous avons

$$c_{jk}^i = \delta_{j+k}^i \theta(j, k)$$

Mais, appliquer un opérateur du système M_k , défini par $(M_k)_j^i = \delta_{j+k}^i [\theta(j, k) - \theta(k, j)]$, à un élément x d'une forme réelle de Jordan de type A_1 , revient à calculer $[e_i, x]$.

Donc, le système M_k est équivalent (au point de vue de la réductibilité) au système des opérateurs définis par la représentation adjointe de l'algèbre de Lie duale. Mais nous avons prouvé, avant le théorème 3, que le système M_{kl} est équivalent (au point de vue de la réductibilité) au système M_k .

Théorème 4. (pour le type B). Le système des opérateurs M_{kl} est équivalent (au point de vue de la réductibilité) au système des opérateurs définis par la représentation de la forme réelle de Lie duale par des tenseurs symétriques d'ordre 2.

Démonstration. Soit S une forme réelle de Jordan de type B, S' , la forme réelle de Lie duale, ρ la représentation de S' sur l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2, dont nous l'identifierons à S . Alors, en prenant $a \in S'$, $x \in S$, nous avons [1]

$$\rho(a)x = [a, x].$$

Si nous prendrons $a = e_k$ ($k \in \Gamma_2$) et $x = x^i e_i$, ($i \in \Gamma_1$)^{*}, alors

$$[\rho(e_k), x] = M_k x.$$

Mais le système M_k ($k \in \Gamma_2$) est équivalent (au point de vue de la réductibilité) au système M_{kl} ($k, l \in \Gamma_1$).

q.e.d.

D'une manière analogue on démontre le :

Théorème 5. (pour le type C). Le système des opérateurs M_{kl} est équivalent (au point de vue de la réductibilité) au système des opérateurs définis par représentation de la forme réelle de Lie duale par des tenseurs symétriques par rapport à une forme symplectique.

Théorème 6. Les restrictions des représentations des énoncés des théorèmes 3, 4 et 5, aux tenseurs à trace nulle sont irréductibles.

Démonstration. Dans le cas de la représentation adjointe (théorème 3), la propriété est évidente parce qu'elle est équivalente à la propriété de C'_{nL} d'être simple.

La forme réelle de Lie duale, dans le cas du type B, est l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques par rapport à φ bilinéaire (symétrique ou antihermitienne). Mais, sur C , φ peut toujours être remplacée par $\sum_i x^i y^i$.

Donc, l'extension complexe de l'algèbre de Lie dont il s'agit est justement l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques (qui est l'algèbre de Lie du groupe orthogonal).

Nous démontrerons, directement, que la représentation, par des tenseurs symétriques d'ordre 2, de cette algèbre de Lie a la restriction aux tenseurs symétriques à trace nulle irréductible.

^{*}) il faut remarquer le fait que les graduations spéciales nous donnent des bases qui permettent d'indexer un tenseur symétrique ou antisymétrique à l'aide d'un seul indice.

Soit $O_n = \{X \mid X = (X_{ij}) \in C_n, XX' = I\}$ le groupe orthogonal complexe en n variables et S_{ij} un tenseur symétrique ($S_{ij} = S_{ji}$) d'ordre 2. Soit T le tenseur

$$T_{ij} = X_{ik} X_{jl} S_{kl}.$$

Au lieu de supposer que O_n actionne dans l'espace complexe V_n , on peut supposer qu'il actionne dans l'espace complexe $T_{\frac{n(n+1)}{2}}$ des tenseurs T .

Cette représentation de O_n invarie les tenseurs symétriques à trace nulle, parce que

$$\sum_i T_{ii} = \sum_i X_{ik} X_{il} S_{kl} = \delta_{kl} S_{kl} = \sum_l S_{ll} = 0.$$

Cette représentation de O_n induit une représentation de son algèbre de Lie qui actionnera sur le tenseur $S = (S_{ij})$ comme il suit :

$X_{ij}(t)$ étant un chemin, nous avons

$$T_{ij}(t) = X_{ik}(t) X_{jl}(t) S_{kl}, \text{ d'où}$$

$$T_{ij} = A_{ik} \delta_{jl} S_{kl} + \delta_{ik} A_{jl} S_{kl}, \text{ où nous avons posé}$$

$$A_{ij} = \frac{d}{dt} X_{ij}(t) \Big|_{t=0}, \text{ ce qui nous donne}$$

$$T_{ij} = A_{ik} S_{kl} + A_{jl} S_{il} = A_{ik} S_{kj} - S_{il} A_{lj},$$

donc, en notant $A = (A_{ij})$ nous avons $T = [A, S]$ et donc a la représentation, par des tenseurs symétriques d'ordre 2, de O_n correspond la représentation adjointe de son algèbre de Lie par des tenseurs symétriques d'ordre 2, que nous désignerons par ρ_A . On peut voir aisément que cette représentation de l'algèbre de Lie invarie, elle aussi, les tenseurs symétriques à trace nulle (parce que nous avons, en général, $\text{tr } T = \text{tr } (AS) - \text{tr } (SA) = 0$). Donc cette représentation de l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques (l'algèbre de Lie de O_n), par des tenseurs symétriques d'ordre 2, est réductible (à le sous-espace C'_n des tenseurs à trace nulle invariant), mais nous montrerons que sa restriction à cet espace est irréductible.

Pour cela, considérons $S = (S_{ij})$ un tenseur arbitraire à trace nulle. Nous montrerons que, en appliquant à S tous les ρ_A , nous obtenons un système de générateurs pour le sous-espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 à trace nulle.

On sait [7] que S peut être réduit, par des transformations de O_n , à la forme:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & & \\ & S_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ces transformations sont admises, parce que O_n invarie la propriété de trace nulle (comme nous l'avons déjà montré) et aussi l'antisymétrie des matrices.

Nous pouvons supposer $S_{11} \neq 0$. S ayant la trace nulle, il existe i tel que : $S_{11} \neq S_{ii}$.

On peut supposer $i = 2$, donc $S_{11} \neq S_{22}$.

Soit

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nous avons

$$[S, M] = \underbrace{(S_{11} - S_{22})}_{\neq 0} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ et} \quad (5)$$

$$[M, [S, M]] = 2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (6)$$

Les matrices du second membre des relations (5) et (6) sont, pour la première cellule une base pour les tenseurs symétriques à trace nulle. Soit (pour $i \neq j$) :

$$P_{ij} = \left(\begin{array}{cc} j & i \\ & 1 \end{array} \right)_i^j \quad \text{et} \quad Q_{ij} = \left(\begin{array}{cc} j & i \\ & -1 \end{array} \right)_i^j$$

Nous avons $[P_{12}, Q_{2j}] = P_{1j}$, ($j \neq 1, 2$).

Mais P_{12} a été donné par la relation (5) et donc nous avons obtenu tous les P_{1j} ($j > 1$).

Nous avons $[P_{1k}, Q_{1j}] = P_{kj}$, ($j \neq 1, k$). D'autre part, nous avons

$$[P_{ij}, Q_{ij}] = 2 \left(\begin{array}{cc} j & i \\ & 1 \end{array} \right)_i^j$$

Donc, nous avons construit, à l'aide de ρ_A , un système de générateurs pour le sous-espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 à trace nulle, notamment, P_{12} , P_{1j} , P_{kj} et deux donnés par (7).

Par conséquent, la représentation de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal complexe $\tilde{O}_n$ (qui est l'algèbre des matrices antisymétriques), par des tenseurs symétriques à trace nulle, est irréductible.

D'une manière analogue on peut montrer que la restriction aux tenseurs symétriques à trace nulle de la représentation du théorème 5 est irréductible.

Remarque. Le théorème 6 résulte de même de la théorie générale de la représentation pour les groupes de Lie [9].

Corollaire. Pour tous les types A, B, C, les opérateurs M_{kl} ont les propriétés suivantes :

$$1) (M_{kl})_i^0 = (M_{kl})_0^i = 0 \quad i, j \in \Gamma, \Gamma_1 \text{ ou } \Gamma_3,$$

2) $M_{kl}|_{C_n'}$ est un système irréductible.

En effet, 1) résulte immédiatement de la deuxième relation (3)*) et 2) des théorèmes 3, 4, 6.

Remarque. Les théorèmes 3—6 ont des correspondantes aussi pour le type de Jordan D. Il faut remarquer que ces théorèmes mettent en évidence une fois de plus, l'étroite liaison qui existe entre les algèbres de Jordan et de Lie.

BIBLIOGRAPHIE

1. Chevalley, C., *Theory of Lie groups*. Paris 1951—1955.
2. Iordănescu, R., *Géométrie différentielle sur les formes réelles de Jordan de type A* (à paraître) Boll. Un. Mat. It. (Bologna).
3. Iordănescu, R., *Sur les graduations spéciales réelles simples*. (à paraître) Rev. roum. math. pures et appl.
4. Popovici, I., *Graduations spéciales simples*. (à paraître). Rev. roum. math. pures et appl.
5. Popovici, I., Turtoi, A., *Propriétés métriques des formes réelles de Jordan de type AII*. Rev. roum. math. pures et appl. 1970, 2, 303—314.
6. Popovici, I., Iordănescu, R., Turtoi, A., *Some maximal graduation classes and their Riemannian properties*. (à paraître) Arch. Math. Brno.
7. Vrănceanu, G., *Leçons de géométrie différentielle* vol. I, II București, 1957.
8. Vrănceanu G., *Leçons de géométrie différentielle*, vol. III, București, 1964.
9. Weyl, H., *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* I, II, III. Math. Z. 1925—1926.

Reçu le 3 V. 1970

Institut de mathématiques
de l'Académie de la R. S. de Roumanie

*) Pour le type A_{II} on utilise aussi les relations $\theta(i, 0) = \theta(0, i) = \theta(-i, i) = \pm 1$, ($i \in \Gamma$), qui sont évidemment valables de même dans les autres cas.

ASUPRA GEOMETRIEI PRELUNGIRILOR FIBRATELOR BANACH

LILIANA MAXIM

În nota de față ne propunem să dăm o definiție a noțiunii de prelungire pentru fibrări Banach ([7], [9]): de asemenea se definesc și se studiază conexiunile de ordin superior pe astfel de fibrate.

Introducere

R. Abraham și S. Smale definesc ([2]) spațiul jeturilor de morfisme între două varietăți modelate de spații Banach, iar P. Ver Eecke generalizează această noțiune ([5]) luând în considerație spații de jeturi olonome, semiolonome și neolonome ale căror proprietăți le studiază complet; un caz special al acestei noțiuni generale, care se referă la secțiunile unui fibrat Banach este prezentat în [1]. Ne propunem mai întâi să extindem acest ultim caz, construind spațiul jeturilor de secțiuni ale unei varietăți fibrate, configurație descrisă de următoarea:

Definiție: Fie $M \in \text{Man}^r(\mathcal{M})$, $N \in \text{Man}^r(\mathcal{N})$ (notațiile din [7]). Tripletul (M, N, ρ) desemnează o *varietate fibrată* dacă morfismul ρ de la M la N este o submersie surjectivă; există deci pentru orice punct $w \in M$ hărțile $(\bar{U}, \varphi)$ (centrată în w) (U, φ_0) (centrată în $\rho(w)$), unde φ este un izomorfism al mulțimii $\bar{U}$, deschisă în M cu produsul $V_1 \times V_2$ (V_1, V_2 submulțimi deschise ale unor spații Banach) astfel că următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{\varphi} & V_1 \times V_2 \\ \rho \downarrow & & \downarrow \psi \\ U & \xrightarrow{\varphi_0} & V \end{array}$$

și $\psi = \varphi_0 \circ \rho \circ \varphi^{-1}$ este o proiecție.

Varietatea N va fi numită bază a varietății fibrate și o hartă $(\bar{U}, \varphi, U, \varphi_0)$ cu proprietatea de mai sus hartă fibrată.

Fie $M_x = \rho^{-1}(x)$, $x \in N$ fibra peste x a varietății fibrate; se arată ușor că M_x este o subvarietate în M , pentru orice x .

OC^r — secțiune parțială a varietății fibrată este un C^r — morfism ξ de la U , deschisă în N , la M care satisface condiția :

$$\rho \circ \xi = id_U$$

Fie $G^r(N, M)$ mulțimea acestor secțiuni. Considerăm acum $x_1, x_2 \in N$, o hartă fibrată $(\bar{U}, \varphi, U, \varphi_0)$ astfel ca $x_1, x_2 \in U$ și ξ_1, ξ_2 două C^r — secțiuni, parțiale definite pe U ; notăm cu ξ_{1U} și ξ_{2U} morfisme definite pe V cu valori în V_2 astfel că ξ_1, ξ_2 se reprezintă sub forma $(\varphi_0^{(x)}, \xi_{1U}(\varphi_0(x)))$ și respectiv $(\varphi_0(x), \xi_{2U}(\varphi_0(x)))$

Vom spune că :

$$(x_1, \xi_1) \equiv^k (x_2, \xi_2) \quad (k \leq r).$$

dacă :

$$x_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} & (\xi_{1U}(\varphi_0(x_1)), D\xi_{1U}(\varphi_0(x_1)), \dots, D^k\xi_{1U}(\varphi_0(x_1))) = \\ & = (\xi_{2U}(\varphi_0(x_2)), D\xi_{2U}(\varphi_0(x_2)), \dots, D^k\xi_{2U}(\varphi_0(x_2))) \end{aligned}$$

Dacă condiția precedentă este adevărată pentru orice alegere a hărții fibrată $(\bar{U}, \varphi, U, \varphi_0)$ se obține o relație de echivalență pe $G^r(N, M)$; vom nota prin $j^k\xi(x)$ clasa de echivalență a perechii (x, ξ) și cu $J^k(\rho)$ mulțimea tuturor claselor. Extensiunea unei secțiuni ξ la un k -jet va fi aplicația

$$j^k\xi: N \rightarrow J^k(\rho)$$

dată de

$$x \rightarrow j^k\xi(x)$$

iar

$$\rho^k: J^k(\rho) \rightarrow N$$

$$j^k\xi(x) \rightarrow x.$$

se va numi proiecția k -jetului și este o submersie.

Pentru fiecare cuplu de întregi (k, s) cu $1 \leq k < s < r$ injecția naturală $G^s(N, M) \rightarrow G^k(N, M)$ este compatibilă cu $\equiv^k$ și $\equiv^s$ așa încît, trecînd la factori se obține aplicația surjectivă :

$$\rho_s^k: J^s(\rho) \rightarrow J^k(\rho)$$

Asociem acum în mod natural la orice hartă fibrată $(\bar{U}, \varphi, U, \varphi_0)$ o hartă k -jet pe $J^k(\rho)$

$$\varphi^k: (\rho^k)^{-1}(U) \rightarrow V \times V_2 \times L(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}) \times \dots \times L_s^k(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$$

$$j^k\xi(x) \rightarrow (\varphi_0(x), \xi_U(\varphi_0(x)), D\xi_U(\varphi_0(x)), \dots, D^k\xi_U(\varphi_0(x)))$$

unde $L_s^k(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$ notează spațiul Banach al formelor k -liniare simetrice definite pe $x^{(k)}\mathfrak{N}$ cu valori pe $\mathfrak{N}$.

Corespunzător unui atlas pe varietatea fibrată (M, N, ρ) se obține un k -jet atlas, astfel că $J^k(\rho)$ dotată cu un k -jet atlas maximal are o structură de varietate fibrată cu baza N și proiecție ρ^k de clasă C^{r-k} .

Dacă (E, X, π) , $E \in \text{Man}^r(\mathcal{S})$, $X \in \text{Man}^r(\mathcal{A})$, este un fibrat Banach de clasă C^r se demonstrează ([1]) că $J^k(\pi)$ este un fibrat Banach de clasă C^{r-k} ; mai mult, dacă ξ este o C^r — secțiune pentru (E, X, π) , $j^k \xi$ este o C^{r-k} — secțiune pentru $J^k(\pi)$.

§ 1. Prelungiri ale fibrelor Banach

Fie π notat fibratul Banach (E, X, π) și τ fibratul tangent la varietatea X .

Definiția 1. — Numim *prelungirea omonomă de ordin k ($k \leq r$) a fibratului Banach π , fibratul $J^k(\pi)$ prelungirea de ordinul k a varietății X va fi fibratul $J^k(\tau)$.*

În [5] se asociază oricărei perechi de varietăți $V \in \text{Man}^r(\mathcal{V})$, $W \in \text{Man}^r(\mathcal{W})$, ($r \geq 1$) un sistem unic de varietăți notate $\tilde{J}^k(V, W)$, ($k = \overline{1, r}$) de clasă C^{r-k} și de submersii $\tilde{\pi}^k: \tilde{J}^k(V, W) \rightarrow V$ definite prin recurență astfel:

$$1) \tilde{J}^1(V, W) = J(V, W) \quad \text{și} \quad \tilde{\pi}^1 \text{ este } \pi^1: J(V, W) \rightarrow V$$

pentru $k = \overline{2, r}$ are loc:

$$2) \tilde{J}^k(V, W) \text{ este o subvarietate proprie în } J(V, \tilde{J}^{k-1}(V, W))$$

3) $\tilde{J}^k(V, W)$ este formată din mulțimea elementelor $X \in J(V, \tilde{J}^{k-1}(V, W))$ care satisfac la condiția:

$$(\tilde{\pi}^k X)^{-1} = j\pi^1(x)$$

4) Diagrama următoare este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{J}^k(V, W) & \xrightarrow{i_k} & J(V, \tilde{J}^{k-1}(V, W)) \\ & \searrow \tilde{\pi}^k & \swarrow \pi^1 \\ & V & \end{array}$$

unde i_k este injectia canonică.

Pentru cazul particular al secțiunilor unui fibrat Banach obținem fibratul notat $\tilde{J}^k(\pi)$.

Definiția 2. — Numim *prelungire neolonomă de ordin k a fibratului Banach de clasă C^r , fibratul $\tilde{J}^k(\pi)$; $\tilde{J}^k(\tau)$ se va numi prelungirea neolonomă de ordin k a varietății X .*

Fie $\tilde{\pi}_l^k: \tilde{J}^k(\pi) \rightarrow \tilde{J}^l(\pi)$, ($k > l$) submersia surjectivă definită natural ([5]).

Definiția 3. — Subfibratul $\bar{J}^k(\pi)$ de clasă C^{r-k} al fibratului $\bar{J}^k(\pi)$, ale cărei secțiuni ξ verifică condiția:

$$(j_x^1 \circ \bar{\pi}_{k-1}^k) \xi(x) = \xi(x)$$

se numește *prelungirea semiolonomă de ordin k a fibratului π* ; $\bar{J}^k(\pi)$ va desemna prelungirea semiolonomă de ordin k a varietății X .

Fie $\bar{\pi}^k: \bar{J}^k(\pi) \rightarrow X$ și $\bar{\pi}_l^k: \bar{J}^k(\pi) \rightarrow \bar{J}^l(\pi)$, ($k > l$) submersii surjective definite natural.

Se vede imediat din definiție că:

$$\bar{J}^k(\pi) \in \text{Man}^{r-k}(\mathcal{X} \times \mathbb{S} \times L(\mathcal{X}, \mathbb{S}) \times \dots \times L^k(\mathcal{X}, \mathbb{S}))$$

Din definiția exactității unui șir de fibrate Banach peste aceeași bază ([7]) și din expresiile hărților locale pentru fibrările π^k și $\bar{\pi}^k$ rezultă:

Teorema 1. Pentru orice k cu $1 \leq k \leq r$ șirurile

$$0 \rightarrow L_s^k(\tau, \pi) \xrightarrow{\alpha^k} J^k(\pi) \xrightarrow{\bar{\pi}_{k-1}^k} J^{k-1}(\pi) \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$0 \rightarrow L^k(\tau, \pi) \xrightarrow{\bar{\alpha}^k} \bar{J}^k(\pi) \xrightarrow{\bar{\pi}_{k-1}^k} \bar{J}^{k-1}(\pi) \rightarrow 0 \quad (1')$$

asociate fibrării π sînt exacte, unde $L^k(\tau, \pi)$ ($L_s^k(\tau, \pi)$) este fibratul Banach al morfismelor de la τ la π^k — liniare (și simetrice) pe fibre.

OBSERVAȚIE: Din exactitatea șirurilor (1) și (1') rezultă imediat exactitatea șirurilor de fascicule de C^k — secțiuni corespunzătoare reciproca nu este în general adevărată.

Dacă τ și π sînt fibrări cu fibră finit dimensională șirurile (1), (1') sînt cele definite în [8] și în acest caz șirurile de fascicule de secțiuni caracterizează șirul de fibrate vectoriale corespunzător.

După același principiu se demonstrează și:

Teorema 2. Pentru orice k, r , cu $1 \leq k \leq r$ șirurile

$$0 \rightarrow J_0^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi) \xrightarrow{\bar{\pi}_1^k} \pi \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$0 \rightarrow \bar{J}_0^k(\pi) \rightarrow \bar{J}^k(\pi) \xrightarrow{\bar{\pi}_1^k} \pi \rightarrow 0 \quad (2')$$

asociate fibrării sînt exacte, unde $J_0^k(\pi)$, $\bar{J}_0^k(\pi)$ sînt fibrări convenabil alese.

§ 2. Conexiuni de ordin superior pe fibrări Banach

Aplicînd principiul general al splittingului șirurilor exacte (1) și (1') rezultă:

Definiția 1: O alegere a unui subfibrat $C^k(\pi)$ al fibratului $J^k(\pi)$, complementar imaginii morfismului fibrat α^k o vom numi *conexiune de ordin k*

pe fibratul Banach π ; elementele din $C^k(\pi)$ le vom numi k — jeturi ale conexiunii.

Un subfibrat $\bar{C}^k(\pi)$ al fibratului prelungirii semiolonome $\bar{J}^k(\pi)$, complementar imaginii morfismului fibrat $\bar{\alpha}^k$ îl vom numi conexiune semiolonomă de ordin k pe fibratul π ; elementele acestui subfibrat vor fi numite k — jeturi semiolonome ale conexiunii.

Există atunci morfismele fibrate unice:

$$C^k : J^{k-1}(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$$

$$\bar{C}^k : \bar{J}^{k-1}(\pi) \rightarrow \bar{J}^k(\pi)$$

cu imaginile respectiv $C^k(\pi)$ și $\bar{C}^k(\pi)$ astfel ca :

$$\pi_{k-1}^k \circ C^k = id_{J^{k-1}(\pi)}$$

$$\bar{\pi}_{k-1}^k \circ \bar{C}^k = id_{\bar{J}^{k-1}(\pi)}$$

Dual, date conexiunile C^k și $\bar{C}^k$, există morfismele fibrate unice :

$$T^k : J^k(\pi) \rightarrow L_s^k(\tau, \pi)$$

$$\bar{T}^k : \bar{J}^k(\pi) \rightarrow L^k(\tau, \pi)$$

avînd ca nuclee subfibratele $C^k(\pi)$ și $\bar{C}^k(\pi)$ astfel că :

$$T^k \circ \alpha^k = id_{L_s^k(\tau, \pi)}$$

$$\bar{T}^k \circ \bar{\alpha}^k = id_{L^k(\tau, \pi)}$$

sînt deci determinate prin :

$$\alpha^k \circ T^k = id_{J^k(\pi)} - C^k \circ \pi_{k-1}^k \quad (3)$$

$$\bar{\alpha}^k \circ \bar{T}^k = id_{\bar{J}^k(\pi)} - \bar{C}^k \circ \bar{\pi}_{k-1}^k \quad (3')$$

OBSERVAȚIA 1. În cazul finit dimensional definiția precedentă coincide cu cea dată de P. Libermann în [8].

OBSERVAȚIA 2. Din definiție și propoziția 8 (§ 5 cap. III! din [7]) rezultă că, dacă X admite partiții ale unității de clasă C^r există conexiuni și conexiuni semiolonome de ordin k ($1 \leq k \leq r$) pentru X ; deci are loc :

Propoziția 1. Pe orice fibrat Banach cu bază varietatea paracompactă $X \in \text{Man}^r(\mathfrak{X})$ unde $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert separabil există conexiuni olono-

me și conexiuni semiolonomie de ordin k . Într-o trivializare locală pentru π , dată prin echivalența fibrată :

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \varphi_0(U) \times \mathbb{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_0: U & \longrightarrow & \varphi_0(U) \end{array}$$

unde φ_0 este o hartă pentru X , morfismele C^k și $\bar{C}^k$ se reprezintă prin aplicațiile :

$$- \Gamma_{\varphi}^k: \varphi_0(U) \rightarrow L(\mathbb{S}, L(\mathfrak{X}, \mathbb{S}), \dots, L_s^{k-1}(\mathfrak{X}, \mathbb{S}); L_s^k(\mathfrak{X}, \mathbb{S})) \quad (4)$$

$$- \bar{\Gamma}_{\varphi}^k: \varphi_0(U) \rightarrow L(\mathbb{S}, L(\mathfrak{X}, \mathbb{S}), \dots, L^{k-1}(\mathfrak{X}, \mathbb{S}); L^k(\mathfrak{X}, \mathbb{S})) \quad (4')$$

pentru $k = 1$ conexiunile olonomă și semiolonomă coincid și sînt reprezentate local prin :

$$- \Gamma_{\varphi}^1 = - \bar{\Gamma}_{\varphi}^1: \varphi_0(U) \rightarrow L(\mathbb{S}; L(\mathfrak{X}, \mathbb{S}))$$

În acest caz șirul exact (1) coincide cu șirul exact (2).

Este evidentă :

Propoziția 2. Un șir de conexiuni de ordin k , $k = 1, \dots, 1$ pentru fibratul Banach π determină un splitting al șirului exact (2).

Un rezultat analog are loc pentru un șir de conexiuni semiolonomie pe fibratul π și șirul exact (2').

În continuare vom organiza ca structuri algebrice mulțimea conexiunilor de ordin $k\{C^k\}$ și mulțimea conexiunilor semiolonomie de ordin $k\{\bar{C}^k\}$ peste π .

V. Cruceanu în [3] introduce noțiunea de modul afin peste un modul vectorial dat plecînd de la observații legate de teoria conexiunilor liniare și afine pe varietăți diferențiabile în [4] se demonstrează că mulțimea conexiunilor liniare și mulțimea conexiunilor afine pe o varietate X , finit dimensională, formează module afine peste anumite module vectoriale.

Definiția: Spunem că mulțimea A este un *modul afin* asociat modulului vectorial V peste inelul K dacă există o aplicație $h: A \times A \rightarrow V$ satisfăcînd condițiile :

$$1). \forall P, Q, R \in A: h(P, Q) + h(Q, R) = h(P, R)$$

2). $\forall O \in A$, astfel ca aplicația $\varphi: A \rightarrow V$ definită prin $\varphi(P) = h(O, P)$ pentru orice $P \in A$ este o bijecție.

Se știe ([7]) că mulțimea morfismelor fibratate ale unei fibrări Banach în alta (pentru un morfism al bazelor fixat) formează modul peste inelul funcțiilor. Se vede însă, ușor, că mulțimea morfismelor C^k și la fel $\bar{C}^k$ nu formează submodule ale modulelor morfismelor fibratate de la $J^{k-1}(\pi)$ la $J^k(\pi)$, fie $M^k(\pi)$, și respectiv de la $\bar{J}^{k-1}(\pi)$ la $\bar{J}^k(\pi)$, fie $\bar{M}^k(\pi)$ peste inelul funcțiilor scalare pe X ;

dar orice combinație convexă a p conexiuni $C_1^k, \dots, C_p^k$ și a p conexiuni semiolonomice $\bar{C}_1^k, \dots, \bar{C}_p^k$ de forma :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i C_i^k$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^p \mu_i \bar{C}_i^k$$

$$\sum_{i=1}^p \mu_i = 1 \quad \mu_i \geq 0.$$

este tot o conexiune de ordin k și respectiv o conexiune semiolonomă de ordin k .

De aici rezultă că $\{C^k\}$ și $\{\bar{C}^k\}$ formează varietăți liniare în $M^k(\pi)$ și respectiv în $\bar{M}^k(\pi)$ și deoarece

$$\pi_{k-1}^k \circ (C_1^k - C_2^k) = 0$$

$$\bar{\pi}_{k-1}^k \circ (\bar{C}_1^k - \bar{C}_2^k) = 0$$

avem :

$$(C_1^k - C_2^k) (J^{k-1}(\pi)) \subset \text{Ker } \pi_{k-1}^k = \text{im } \alpha^k.$$

$$(\bar{C}_1^k - \bar{C}_2^k) (\bar{J}^{k-1}(\pi)) \subset \text{Ker } \bar{\pi}_{k-1}^k = \text{im } \bar{\alpha}^k.$$

Are loc deci următorul rezultat :

Propoziția 3. — Mulțimea $\{C^k\}$ formează un modul afin peste modulul vectorial al C^k — secțiunilor fibratului Banach $L_s^k(\tau, \pi)$. La fel mulțimea $\{\bar{C}^k\}$ formează un modul afin peste modulul vectorial al C^k — secțiunilor fibratului $L^k(\tau, \pi)$.

Vom demonstra acum că categoria fibratelor Banach peste X care admit o conexiune de ordin k și categoria fibratelor Banach peste X care admit o conexiune semiolonomă de ordin k sînt închise prin operația de luare a sumei directe.

Lema 1. — Fie (E, X, π) și (F, X, ρ) , $E \in \text{Man}^r(\mathfrak{S})$, $F \in \text{Man}^r(\mathfrak{F})$ două fibrări vectoriale peste X de clasă C^r . Au loc echivalențele fibrate naturale :

$$J^k(\pi \oplus \rho) = J^k(\pi) \oplus J^k(\rho)$$

$$\bar{J}^k(\pi \oplus \rho) = \bar{J}^k(\pi) \oplus \bar{J}^k(\rho)$$

Demonstrația este evidentă.

Propoziția 4. — Fie C_π^k, C_ρ^k conexiunii de ordin k și $\bar{C}_\pi^k, \bar{C}_\rho^k$ conexiuni semiolonomie de ordin k pentru π și respectiv ρ , atunci $C_\pi^k \oplus C_\rho^k, \bar{C}_\pi^k \oplus \bar{C}_\rho^k$ reprezintă o conexiune și o conexiune semiolonomă de ordin k pe $\pi \oplus \rho$; într-o trivializare locală acestea sînt reprezentate prin:

$$— \Gamma_{\pi \oplus \rho}^k: \varphi_0(U) \rightarrow L(\mathbb{S} \times \mathbb{F}, L(\mathcal{X}, \mathbb{S} \times \mathbb{F}), \dots, L_s^{k-1}(\mathcal{X}, \mathbb{S} \times \mathbb{F}); L_s^k(\mathcal{X}, \mathbb{S} \times \mathbb{F}))$$

$$— \bar{\Gamma}_{\pi \oplus \rho}^k: \varphi_0(U) \rightarrow L(\mathbb{S} \times \mathbb{F}, L(\mathcal{X}, \mathbb{S} \times \mathbb{F}), \dots, L_s^{k-1}(\mathcal{X}, \mathbb{S} \times \mathbb{F}); L^k(\mathcal{X}, \mathbb{S} \times \mathbb{F}))$$

Demonstrație: Folosind identificarea din Lema 1 și reprezentările locale pentru conexiunile în discuție rezultă afirmația din enunț.

În [6] se arată de asemeni că se poate asocia o conexiune de ordinul 1 pe fibratul $L(\pi, \mathfrak{c})$ definită într-o trivializare locală prin:

$$\Gamma_{L(\pi, \rho)}: \varphi_0(U) \rightarrow L(L(\mathbb{S}, F), L(\mathcal{X}, L(\mathbb{S}, F)))$$

$$[\Gamma_{L(\pi, \rho)}(x)(A, y)] \xi = \Gamma_\rho(x)(A\xi, y) - A \cdot \Gamma_\pi(x)(\xi, y) \quad (5)$$

§ 3. Diferențierea covariantă pe fibrări Banach

Fie π un fibrat Banach de clasă C^k și conexiunile $C^k, \bar{C}^k$ definite pe acesta. Dacă ξ este o C^k — secțiune pe π vom defini derivata covariantă și derivata covariantă semiolonomă ale secțiunii ξ ca fiind secțiuni în fibratele $L_s^k(\tau, \pi)$ și respectiv $L^k(\tau, \pi)$ prin

$$\nabla^k \xi(x) = T_*^k \circ j^k \xi(x)$$

$$\bar{\nabla}^k \xi(x) = \bar{T}_*^k \circ \bar{j}^k \xi(x).$$

unde $T_*^k, \bar{T}_*^k$ notează homomorfismele între fascicule de secțiuni induse de T^k și $\bar{T}^k$.

Din (3) și (4) rezultă că într-o trivializare locală avem:

$$\nabla^k \xi(x) = D^k \xi(x) + \Gamma_\varphi^k(x)(\xi(x), D\xi(x), \dots, D^{k-1}\xi(x))$$

Pentru $k=1$ obținem:

$$\nabla \xi(x) = D\xi(x) + \Gamma_\varphi(x)(\xi(x)). \quad (6)$$

Formula (6) arată că definiția 1 este o generalizare naturală a definiției din [2], [6], [10].

Fie acum π, ρ două fibrări Banach peste X , C_π^k și C_ρ^k conexiuni de ordin k pe ele și $f: E \rightarrow F$ o aplicație fibrată adică $\rho \circ f = \pi$.

Definim derivata covariantă a aplicației f ca fiind aplicația fibrată

$$\nabla^k f: L_s^k(\tau, \pi) \oplus J^{k-1}(\pi) \rightarrow L_s^k(\tau, \rho)$$

dată de:

$$\nabla^k f = T_\rho^k \circ j^k f \circ (\alpha_\pi^k \oplus C_\pi^k)$$

Analog pentru două conexiuni semiolonyme $\bar{C}_\pi^k, \bar{C}_\rho^k$ definim

$$\bar{\nabla}^k f = \bar{T}_\rho^k \circ \bar{j}^k f \circ (\bar{\alpha}_\pi^k \oplus \bar{C}_\pi^k)$$

În cele ce urmează, determinăm conexiunile preimaginii unui fibrat Banach asociate conexiunilor de pe acest fibrat.

Fie X, X' două varietăți Banach de clasă C^r , (E, X', ϑ) un C^r — fibrat Banach cu conexiunea de ordinul k , C'^k . Fie $h: X \rightarrow X'$ o aplicație de clasă C^r . Atunci preimaginea $(h^*E, X, h^*\pi)$ cu $(h^*E)_x = E_{h(x)}$ este un C^r — fibrat Banach.

Definim o conexiune C^k pentru h^* prin:

$$j_i^k \circ C^k = C'^k \circ j_i^{k-1}$$

unde $i: h^*E \rightarrow E$ este aplicația de incluziune. Deoarece i este un izomorfism pe fiecare fibră, j_i^k va fi izomorfism pe fiecare fibră și deci C^k este bine definită.

Pentru $k = 1$ definiția de mai sus coincide cu cea dată în [6] și în acest caz derivata covariantă $h^*\nabla'$ pentru $h^*\pi$ este dată de:

$$(h^*\nabla')(\xi \circ h) = h^*(\nabla'\xi) \cdot \partial h$$

unde ξ este o secțiune în $\pi'^*\nabla'$ derivata covariantă pe π și ∂h o secțiune în $L(\tau, h^*\pi)$ dată de: $\partial h(x) \cdot v = Th(v)$.

Presupunem că avem o conexiune pe X , adică o conexiune de ordin 1 pe fibratul tangent $(T(X), X, \tau)$. Mai mult fie π un fibrat Banach cu o conexiune C^1 . Dacă ξ este o C^r — secțiune pentru π , $\nabla^1 \xi$ este după (6) de clasă C^{r-1} . Vom defini inductiv derivatele covariante de ordin superior folosind conexiunea indusă pe $L^m(\tau, \pi) = L(\tau, L^{m-1}(\tau, \vartheta))$ după (5). Astfel, $\nabla^{(m)} \xi$ este o secțiune în $L^m(\tau, \pi)$ și este evidentă demonstrația următoarei propoziții:

Propoziția 4. — $\nabla^{(m)}$ este definită de o conexiune semiolonomă de ordin m pe fibratul π pe care o numim prelungirea de ordin m a conexiunii C^1 .

BIBLIOGRAFIE

1. R. Abraham, J. Robbin — *Transversal mappings and flows* W. A. W. A. Benjamin, 1967, cap. I
2. R. Abraham, S. Smale — *Lectures on Smale on differential topology*, Notes ad Columbia Univ. 1962—1963.
3. V. Cruceanu — *Asupra modulelor afine*. Studii și cercetări matematice, vol. XXI, 1969
4. V. Cruceanu — *Sur l'ensemble des connexions sur un espace fibré*. (Va apare)
5. P. Ver Eecke — *Calcul des jets*. Sao Paolo, 1967
6. H. I. Eliasson — *Geometry of manifolds of maps*. Journal of Diff. Geometry. vol. I, 1967
7. S. Lang — *Введение в теорию дифференцируемых многообразий* Москва 1967.
8. P. Libermann — *Sur la géométrie des prolongements* Annales Institut. Fourier, 1964, vol. XIV

9. R. Palais — *Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds*. Mimeo Notes Brandeis Univ., 1964—65
10. J. P. Penot — *Des submersions en fibrations*. Sem. de Geometrie dif. de Melle Libermann 5 juin 1967

Primită la 10. V. 1970

Universitatea „Al. I. Cuza,” Iași
Facultatea de matematică-mecanică

SUR LA GÉOMETRIE DES PROLONGEMENTS DES ESPACES FIBRÉS BANACH

Résumé

En utilisant les espaces de jets des sections d'un espace fibré Banach, nous définissons les prolongements holonome et semi-holonomes et non holonomes de celui-ci ; on définit aussi les connexions holonomes et semiholonomes d'ordre supérieur. Nous les étudions à l'aide de la dérivation covariante associée et nous donnons les ensembles de ces connexions d'une structure de modules affins.

О ГЕОМЕТРИИ ПРОДОЛЖЕНИЙ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Краткое содержание

При помощи пространств струй сечений банахового расслоения, определяются голономные, полуголономные и неголономные продолжения. Определяются также голономные и полуголономные связности высшего порядка, которые изучаются при помощи их ковариантной производной. Рассматриваются структуры аффинного модуля на множествах этих связностей.

SUR LES ESPACES D'EINSTEIN CENTRALES SYMÉTRIQUES

N. MIHĂILEANU

1. M. le professeur G. Vrănceanu a montré [1] que pour un espace Riemann à symétrie sphérique générale

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 - A^2(dx^1)^2 - B^2[(dx^2)^2 + \cos^2 x^2(dx^3)^2],$$

V, A, B étant des fonctions des variables x^1, x^4 , on peut effectuer un changement des variables, tel que B se réduise à x^1 , sauf un certain cas particulier. On a donc la métrique

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 - A^2(dx^1)^2 - (x^1)^2[(dx^2)^2 + \cos^2 x^2(dx^3)^2]. \quad (1)$$

Par cette réduction on peut simplifier beaucoup le calcul pour écrire les équations d'Einstein.

D'autre côté il est connu [2, p. 313] qu'un espace pour lequel

$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{1}{A^2} = 1 - \frac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2 \quad (2)$$

c, α , γ étant des constantes est un espace d'Einstein, c'est-à-dire, en notations habituelles,

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}. \quad (3)$$

Réciproquement, en utilisant la simplification introduite par M. G. Vrănceanu, nous déterminons les conditions dans les quelles un espace (1) à métrique sphérique générale soit un espace d'Einstein.

2. En première ligne, conformément à (3), toutes les composantes $R_{ij}(i \neq j)$ du tenseur de Ricci sont nulles. Ce résultat est valable pour la métrique (1), indépendamment des conditions (3), sauf éventuellement pour R_{14} . Les conditions (3) imposent aussi $R_{14} = 0$. Dans la formule qui donne R_{14} [2, p. 308], pour $B = x^1$, on a

$$R_{14} = \frac{2A_4}{Ax^1} = 0, \quad A_i = \frac{\partial A}{\partial x^i},$$

donc A est une fonction seulement de la variable x^1 . Dans ce cas, avec $B = x^1$, $A = A(x^1)$, les formules (3) pour R_{11} , R_{22} , R_{44} se simplifient à

$$\begin{aligned} -\frac{V_{11}}{V} + \frac{2A_1}{Ax^1} + \frac{A_1V_1}{AV_1} &= -\lambda A^2, \\ 1 - \frac{1}{A^2} + \frac{A_1x^1}{A^3} - \frac{V_1x^1}{A^2V} &= -\lambda(x^1)^2, \\ \frac{VV_{11}}{A^2} + \frac{2VV_1}{A^2V} - \frac{VA_1V_1}{A^3} &= \lambda V^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Pour $R_{33} = R_{22} \cos^2 x^2$, la relation (3) est équivalente à celle qui correspond à R_{22} .

En éliminant la fonction λ , on obtient la même relation

$$\left(\frac{A_1}{A} \frac{V_1}{V} - \frac{V_{11}}{V}\right)(x^1)^2 + \left(\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V}\right)x^1 + 1 - A^2 = 0. \quad (5)$$

Donc le système (4) est compatible et on a une seule relation pour les deux fonctions A et V . C'est-à-dire *il y a une infinité des espaces d'Einstein à symétrie sphérique générale. Pour ces espaces, $V = V(x^1, x^4)$, $A = A(x^1)$.*

3. Pour intégrer l'équation (5) il faut introduire une condition supplémentaire entre A et V , par exemple

$$\frac{A_1}{A} + \frac{V_1}{V} = 0, \quad V = \frac{c}{A} \quad (6)$$

où $c = c(x^4)$. En éliminant V entre (5) et (6) on obtient

$$\left(\frac{A_1}{A}\right)_1 - 2\left(\frac{A_1}{A}\right)^2 + \frac{1 - A^2}{(x^1)^2} = 0. \quad (7)$$

On substitue $A^2 = \frac{1}{X}$, donc

$$X_{11} = 2 \frac{X - 1}{(x^1)^2} \quad (8)$$

et une nouvelle substitution $X = 1 + \frac{Y}{x^1}$ aboutit à l'équation

$$Y_{11} = 2 \frac{Y_1}{x^1}, \quad (9)$$

donc

$$A^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2}, \quad V^2 = c^2 \left(1 + \frac{\alpha}{x^1} + \gamma(x^1)^2 \right) \quad (10)$$

où $c(x^4)$. Par un changement de variables on peut réduire c à une constante et on obtient la métrique (2). Alors $V = V(x^1)$ aussi.

4. Pour cette métrique on a

$$\lambda = 3\gamma, \quad R = 12\gamma, \quad (11)$$

$$\frac{T_{11}}{A^2} = -\frac{T_{22}}{(x^1)^2} = \frac{T_{44}}{c^2 A^2}, \quad T_{33} = T_{22} \cos^2 x^2. \quad (12)$$

5. Pour $\gamma = 0$ on obtient la métrique Schwarzschild, ayant toutes les composantes T_{ij} du tenseur électromagnétique nulles. En [3, p. 410] est donné un seul exemple d'espace d'Einstein à symétrie sphérique, celui qui correspond pour $\gamma = 0$. En [4, p. 236] est envisagé l'espace (1), (2), le problème étant autrement posé.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Vrănceanu. Sur les métriques relativistes à symétrie sphérique. Bulletin Mathématique de la Soc. Math. de la R. S. de Roumanie, tome 10 (58), 1966, p. 59—62.
2. G. Vrănceanu—C. Teleanu. Geometrie euclidiană, Geometrii neeuclidiene. Teoria relativității. București. 1967.
3. J. L. Singe. Obștaia teorii otноситelnosti. (traduction). Moscou, 1963.
4. A. Z. Petrov. Prostranstva Einsteina. Moscou, 1961.

Reçu le 10. V. 1970

Université de Bucarest
Faculté de mathématique-mécanique

1914

(1)

$$x^2 + y^2 = z^2$$

(2)

$$x^2 + y^2 = z^2$$

The following is a list of the names of the persons who have been elected to the office of President of the American Medical Association for the year 1914. The names are listed in alphabetical order of their surnames.

The following is a list of the names of the persons who have been elected to the office of Secretary of the American Medical Association for the year 1914. The names are listed in alphabetical order of their surnames.

The following is a list of the names of the persons who have been elected to the office of Treasurer of the American Medical Association for the year 1914. The names are listed in alphabetical order of their surnames.

APPLICAZIONI DI CURVA DISCRIMINATIVA AD ALCUNE CARTE DI CONTROLLO *)

TIBERIU POSTELNICU

1. Generalità

Il metodo statistico più largamente usato per assicurare l'uniformità di certe caratteristiche dei prodotti durante il tempo per si estende il processo produttivo è quello delle carte di controllo. Come è noto, esso consiste nel calcolare un certo parametro statistico in base ai valori che la caratteristica in esame assume in successivi campioni prelevati in tempi diversi dal flusso dei prodotti e nel verificare che le variazioni del parametro non superano certi limiti entro i quali si ritiene operante il caso, mentre al di là di essi si presume l'intervento di un fattore sistematico di deviazione. Tale scopo viene agevolmente raggiunto quando è nota la funzione di distribuzione del parametro; nella maggior parte dei casi tale funzione è rappresentata (o bene approssimata) dalla legge normale, per cui i limiti suddetti sono fissati rispetto al valore medio del parametro ad una distanza pari ad un multiplo del suo scostamento quadratico.

L'impostazione probabilistica del problema è la seguente:

Supponiamo che l'operatore desideri accettare il lotto se il parametro p è inferiore o uguale al valore p^* e respingerlo per $p > p^*$; scelti due valori $p_1 < p^*$ e $p_2 > p^*$, l'operatore, decide di accettare il lotto nell' $(1 - \alpha) \%$ dei casi quando $p = p_1$, e di accettarlo in β casi su cento se $p = p_2$. Ciò equivale a porre che nel primo caso il valore $\pi(n)$ del parametro nel campione di n elementi sia compreso tra i limiti l e m della carta di controllo con probabilità $1 - \alpha$ e nel secondo caso con probabilità β . In genere, se p assume il valore x , la probabilità di accettare il lotto è:

$$P[l \leq \pi(n) \leq m \mid p = x] = y$$

e otteniamo quindi la probabilità di accettazione in funzione dei valori effettivi del parametro:

$$y = \varphi(x)$$

*) Questo lavoro è effettuato durante il soggiorno all' Istituto di Matematiche Applicate dell'Università di Bonn, — grazie alla Fondazione Humboldt.

Rappresentata graficamente, tale funzione descrive una curva che indica il potere selettivo del criterio di decisione e si può perciò chiamare curva discriminativa (tale denominazione corrisponde a quella di „operating characteristic curve”).

Il nostro assunto è quello di studiare le applicazioni di tali curve ad alcune tra le più diffuse carte di controllo e quindi di determinare, in base ad esse, le espressioni teoriche non solo dei limiti della carta, ma soprattutto della numerosità del campione, così da vincolare strettamente il criterio di decisione alle dimensioni prestabilite degli errori di primo e di secondo tipo.

2. Carte di controllo per la variabilità

La percentuale p di elementi difettosi può variare, sempre nell'ipotesi che la distribuzione delle singole misure segua la curva normale, oltre che per le variazioni della media μ dell'universo (restando costante la varianza) anche per variazioni di σ a parità di μ . E' da notare che, in tal caso, la percentuale p aumenta solo se aumenta σ , pertanto, se al produttore è noto da precedenti rilevazioni che, finché il processo di produzione è sotto controllo, la varianza è pari a σ_1^2 (cui corrisponde una percentuale p_1), egli dovrà premunirsi dal rischio che la percentuale di difettosi divenga $p_2 > p_1$, in seguito all'azione di un fattore sistematico che ha portato σ al livello $\sigma_2 > \sigma_1$.

In tal caso la carta di controllo è solo unilaterale e consisterà di un valore centrale σ_1^2 e di un limite superiore $\sigma_1 + kv$ dove con v indichiamo la varianza della variabile casuale $s(n)$ „scarto del campione composto di n elementi”.

Per $\sigma = \sigma_1$ o σ_2 si potranno impostare le equazioni

$$\begin{aligned} P[s(n) \leq \sigma_1 + Kv \mid \sigma = \sigma_1] &= 1 - \alpha \\ P[s(n) \leq \sigma_1 + Kv \mid \sigma = \sigma_2] &= \beta \end{aligned} \quad (1)$$

In prima approssimazione possiamo considerare la variabile

$$s(n) = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2}{n-1}}$$

dove x_i è il valore della misura i -esima distribuita normalmente con media pari a σ e varianza pari a $\sigma^2 / 2n$. Dalla (1) segue perciò:

$$\frac{\sqrt{2n}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\sigma_1 + K \frac{\sigma_1}{\sqrt{2n}}}^{\infty} \exp \left[-n \left(\frac{s - \sigma_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] ds = \alpha \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2n}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\sigma_1 + K \frac{\sigma_1}{\sqrt{2n}}}^{\infty} \exp \left[-n \left(\frac{s - \sigma_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] ds = 1 - \beta. \quad (3)$$

Operando sulle variabili standardizzate $\xi = \frac{s - \sigma_1}{\sigma_1} \sqrt{2n}$ per la (2) e $\xi = \frac{s - \sigma_2}{\sigma_2} \sqrt{2n}$ per la (3) si ricava immediatamente

$$K = z_\alpha; \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) \sqrt{2n} + K \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = z_{1-\beta} = -z_\beta \quad (4)$$

e quindi, posto $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{\varphi}$,

$$\left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \sqrt{2n} = z_\beta + \frac{z_\alpha}{\varphi} \quad (5)$$

da cui si ricava la numerosità del campione

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{z_\beta + \frac{z_\alpha}{\varphi}}{1 - \frac{1}{\varphi}} \right)^2 \quad (6)$$

Il limite superiore sarà pertanto

$$\sigma_1 + z_\alpha \frac{\sigma_1 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right)}{z_\beta + \frac{z_\alpha}{\varphi}} = \sigma_1 \frac{z_\beta + \frac{z_\alpha}{\varphi}}{z_\beta + \frac{z_\alpha}{\varphi}} \quad (7)$$

Se non si vuole ricorrere alla approssimazione, conviene operare sulla variabile s^2 ricordando che la quantità $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ è distribuita come il parametro χ^2 con $n-1$ gradi di libertà. Dopo le opportune trasformazioni, il sistema (1) diventa

$$P \left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma_1^2} > \frac{(n-1)(\sigma_1 + Kv)^2}{\sigma_1^2} \right] = \alpha \quad (8)$$

$$P \left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma_2^2} > \frac{(n-1)(\sigma_1 + Kv)^2}{\sigma_2^2} \right] = 1 - \beta$$

da cui segue, indicando con $\chi^2_{(v;\gamma)}$ il valore di χ^2 fondato su v gradi di libertà che viene superato con probabilità γ ,

$$\frac{(n-1)(\sigma_1 + Kv)^2}{\sigma_1^2} = \chi^2_{(n-1; \alpha)} \quad (9)$$

$$\frac{(n-1)(\sigma_1 + Kv)^2}{\sigma_2^2} = \chi^2_{(n-1; 1-\beta)} \quad (10)$$

Ricordando che è $\sigma_2 = \varphi\sigma_1$, si ottiene dalle (9) et (10)

$$\frac{\chi_{(n-1;\alpha)}^2}{\chi_{(n-1;1-\beta)}^2} \quad (11)$$

e poichè α , β e φ sono noti, non resta che trovare per quale valore di n la (11) viene soddisfatta.

Il valore di K si ricava dalla (9) o dalla (10); dalla prima di esse, per esempio si ottiene:

$$K = \frac{\sigma_1}{v} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1;\alpha)}^2}{n-1}} \quad (12)$$

dove è

$$v = \sigma_1 \sqrt{1 - \frac{2}{n-1} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right]^2} \quad (13)$$

3. Carte di controllo per le percentuali

Abbiamo finora considerato le variazioni delle percentuali p di elementi difettosi come dipendenti alternativamete da variazioni della media μ o dalla varianza σ^2 dell'universo. Un metodo più generale che comprende i casi precedenti ed il caso in cui entrambi i parametri variano ed inoltre prescinde dall'ipotesi di normalità nella distribuzione delle misure, può essere applicato quando si prenda in considerazione direttamente la percentuale suddetta; la sola ipotesi necessaria per rendere più semplici i calcoli è quella che il lotto da cui si estrae il campione sia composto di un numero molto grande di elementi al fine di equiparare una estrazione casuale senza ripetizione ad una casuale con ripetizione.

Considereremo due diversi casi; nel primo la percentuale p ha il significato che le abbiamo attribuito finora.

Poniamo che il produttore giudichi soddisfacente un processo di lavorazione che dia luogo alla percentuale p_1 di elementi difettosi: pertanto egli limiterà ad α la probabilità di arrestare la produzione nell'errata supposizione che tale percentuale sia superiore. Inoltre egli deciderà che se la percentuale sale al livello p_2 sono senz'altro intervenuti fattori sistematici di deviazione, onde è necessario accorgersi di tale mutamento con probabilità $1 - \beta$, al fine di arrestare il processo e ricercare le cause di disturbo.

Se nei campioni di numerosità n si misura il numero d di elementi difettosi, la carta di controllo avrà la linea centrale posta al livello np_1 e il limite superiore al livello $np_1 + K\sqrt{np_1(1-p_1)}$. Stabiliamo di indicare con c il

numero intero più prossimo all'ultima espressione e notiamo intanto che tale carta di controllo è logicamente unilaterale e che la variabile campionaria d si distribuisce secondo lo schema bernoulliano con media pari ad np e varianza $np(1-p)$.

Possiamo, in base alle considerazioni precedenti, impiantare il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} P(d \leq c \mid p = p_1) &= 1 - \alpha \\ P(d \leq c \mid p = p_2) &= \beta \end{aligned} \quad (14)$$

in base alle quali si dovranno ricavare i parametri n e c . Tale sistema equivale al seguente:

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p_1^d (1-p_1)^{n-d} &= 1 - \alpha \\ \sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p_2^d (1-p_2)^{n-d} &= \beta \end{aligned} \quad (15)$$

e, poichè sussiste l'uguaglianza

$$\sum_{i=0}^K \binom{\nu}{i} p^i (1-p)^{\nu-i} = 1 - \frac{B_p(K+1; \nu-K)}{B(K+1; \nu-K)} \quad (16)$$

dove con B_p si indica la funzione Beta incompleta, possiamo scrivere il sistema (15) sotto la forma

$$\begin{aligned} \frac{B_{p_1}(c+1; n-c)}{B(c+1; n-c)} &= \alpha \\ \frac{B_{p_2}(c+1; n-c)}{B(c+1; n-c)} &= 1 - \beta \end{aligned} \quad (17)$$

che è risolvibile abbastanza facilmente servendosi delle tavole della funzione $I_p = \frac{B_p}{B}$.

Diversamente si opera se la percentuale p indica la frequenza relativa del numero di difetti che si riscontrano in ciascun articolo prodotto. Possiamo ancora considerare i valori p_1, p_2, α e β e scrivere il sistema (14); tuttavia poichè i valori di p sono estremamente bassi è lecito considerare il numero assoluto d di difetti distribuito secondo la funzione di Poisson (o degli eventi rari).

Al posto del sistema (15) scriviamo pertanto:

$$e^{-np_1} \sum_{d=0}^c \frac{(np_1)^d}{d!} = 1 - \alpha$$

$$e^{-np_2} \sum_{d=0}^c \frac{(np_2)^d}{d!} = \beta$$
(18)

dove il valore c rappresenta il numero intero più prossimo al valore $np_1 + K \sqrt{np_1}$ che è il livello a cui vien posto il limite superiore della carta di controllo. Il sistema (18) si può risolvere ricorrendo all'apposito abaco pubblicato da G. Cavé.

4. Osservazioni sulla riduzione della numerosità del campione

Il metodo di riduzione risulta notevolmente semplificato se si ricorre ad un altro schema che applicheremo successivamente nell'ipotesi che la varianza o la media dei lotti muti sistematicamente.

Siano ancora gli v articoli che è conveniente estrarre dalla massa di elementi prodotti nell'unità di tempo e si suponga che in h successive unità di tempo la distribuzione della massa si mantenga gaussiana con media costante, mentre muta la varianza σ^2 secondo una progressione geometrica di ragione T . Per fissare le idee sia σ_1^2 la varianza della massa nella prima unità di tempo e $\sigma_h^2 = \sigma_1^2 T^{h-1}$ quella corrispondente all'istante h .

Se sotto tali condizioni, si considerano i v^h articoli estratti e si sommano le misure di quelli estratti per primi negli h campioni, e quindi la stessa operazione si ripete sui secondi, sui terzi, ... sui v -esimi, si ottengono v valori $z_1, z_2, \dots, z_v$. Questi a loro volta rappresentano un campione di v elementi estratti a caso da una variabile casuale somma di v c. elementari gaussiane e pertanto gaussiana anch'essa con media uguale alla somma delle medie e varianza $\bar{\sigma}^2$ pari alla somma delle c varianze, onde sarà $\bar{\sigma}^2 = h\sigma_1^2$ se è $T = 1$ e

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 \frac{T^h - 1}{T - 1} = \lambda \sigma_1^2 \text{ se } T \neq 1.$$

Se l'operatore assegna a σ_h^2 un certo valore $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ (che è la varianza cui vuol far corrispondere la probabilità di non accorgersi dell'intervento di fattori sistematici di deviazione) egli viene altresì a definire la ragione

$$T' = \sqrt[h-1]{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} = \sqrt[h-1]{\varphi^2}$$
(19)

e pertanto, indicando con s_z^2 la varianza del campione composto dai v valori z_i e con l il limite superiore della carta di controllo, si potrà scrivere il sistema:

$$\begin{aligned} P(s_z^2 > l \mid T = 1) &= \alpha \\ P(s_z^2 > l \mid T = T') &= 1 - \beta \end{aligned} \quad (20)$$

Il valore medio e lo scarto quadratico della v. c. campionaria s_z^2 sono, per $T = 1$, pari rispettivamente a $h\sigma_1^2$ ed a $\sigma_1^2 \sqrt{2h / (v - 1)}$ per cui sarà

$$l = h\sigma_1^2 + K\sigma_1^2 \sqrt{\frac{2h}{(v-1)}} = h\sigma_1^2 \left[1 + K \sqrt{\frac{2}{h(v-1)}} \right] \quad (21)$$

Inoltre, poichè la quantità $(v - 1) s_z^2 / \sigma^2$ è distribuita come la v. c. χ^2 con $v - 1$ gradi di libertà, il sistema (20) sarà equivalente a

$$P \left[\frac{(v-1) s_z^2}{h\sigma_1^2} = \chi^2 > \frac{(v-1)l}{h\sigma_1^2} \right] = \alpha \quad (22)$$

$$P \left[\frac{(v-1) s_z^2}{\lambda' \sigma_1^2} = \chi^2 > \frac{(v-1)l}{\lambda' \sigma_1^2} \right] = 1 - \beta$$

e quindi in base alla (21) si ottiene

$$\chi_{(v-1; \alpha)}^2 = \frac{(v-1)l}{h\sigma_1^2} = (v-1) \left[1 + K \sqrt{\frac{2}{h(v-1)}} \right] \quad (23)$$

$$\chi_{(v-1; 1-\beta)}^2 = \frac{(v-1)l}{\lambda' \sigma_1^2} = (v-1) \frac{h}{\lambda'} \left[1 + K \sqrt{\frac{2}{h(v-1)}} \right] \quad (24)$$

Essendo noti i due valori di χ^2 , l'incognita h viene determinata in base al rapporto tra la (23) e la (24); risolvendo cioè l'equazione

$$\frac{\chi_{(v-1; \alpha)}^2}{\chi_{(v-1; 1-\beta)}^2} = \frac{\lambda'}{h} = \frac{(\varphi^2)^{\frac{h}{h-1}} - 1}{h[(\varphi^2)^{\frac{h}{h-1}} - 1]} \quad (25)$$

L'espressione che compare nell'ultimo membro non è che la media aritmetica delle h quantità $1, (\varphi^2)^{\frac{1}{h-1}}, (\varphi^2)^{\frac{2}{h-2}}, \dots, \varphi^2$ ne segue che dovrà essere

$$1 \leq \frac{\chi_{(v-1; \alpha)}^2}{\chi_{(v-1; 1-\beta)}^2} \leq \varphi^2 \quad (26)$$

ovvero il valore v non può essere stabilito arbitrariamente.

Poichè il rapporto tra i due valori di χ^2 è decrescente al crescere della numerosità del campione per $\alpha < 1 - \beta$, ne segue che, al limite, il minor valore di ν è quello per cui si verifica

$$\frac{\chi^2_{(\nu-1; \alpha)}}{\chi^2_{(\nu-1; 1-\beta)}} = \varphi^2 \quad (27)$$

Tale espressione equivale alla (11); otterremo cioè $\nu = n$ ed $h = 1$ e non si giungerà ad alcuna riduzione nella numerosità dei campioni.

La schema studiato si rivela pertanto inefficiente, se applicato alle carte di controllo per la variabilità. E' interessante invece notare come, applicandolo al caso della media si ottengono gli stessi risultati.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Cavé, R., — *Le contrôle statistique des fabrications*, Eyrolles, Paris, 1953.
- 2 Duncan, A., — *Quality Control and Industrial Statistics*, Irwin, R. D., Chicago, 1952.
- 3 Grant, E., — *Statistical Quality Control*, Mc Graw Hill, New York, 1946.
- 4 Hald, A., — *Statistical Theory with Engineering Applications*, J. Wiley, New York, 1952.
- 5 Juran, J. M., — *Quality Control Handbook*, Mc Graw Hill, Hill, N. Y., 1951.
- 6 Stevens, *Control by Gauging*, „Journal of the Royal Statistical Society“, Serie B, vol. XI, 1948, pag. 54—98, London, 1948.
- 7 Wilson, E. B. e Hilferty, M. M., — *The Distribution of Chi Square*, Proc. Nat. Acad. Sci., 17, 1931.

Ricevuto il 10. V. 1970

Accademia della R. S. di Romania
Centro di statistica matematica

SOME PROPERTIES OF THE $\overline{\nabla}$ — CONNECTION —

P. STAVRE

„In this paper, we shall define” the $\overline{\nabla}$ — connection” (8). The first result is contained in Theorem 1. The second result obtained is contained in Theorem 2”.

Let V be an almost complex manifold with almost complex structure J ,

$$J^2 = -I \quad (1)$$

Let be V with almost complex structure J ; $-J$ is said to be „conjugate” to J .

Every J — almost complex structure on V defines in $T_x(V)$ a complex structure ($\dim V = 2n$). Let ([1]).

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

be the canonical complex structure of R^{2n} (I_n = the identity matrix of degree n).

We consider the vector space C^n of n -tuples.

$$z = (z^1 \dots z^n) \rightarrow (x^1 x^2 \dots x^n, y^1 \dots y^n) \quad (3)$$

with

$$z^k = x^k + iy^k \quad x^k, y^k \in R \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

(C^n can be identified with R^{2n}).

A non-singular complex linear mapping: $C^n = R^{2n}$ into $T_x(V)$

$$\omega : C^n \rightarrow T_x(V) \quad \forall x \in V \quad \omega \circ J_0 = J \circ \omega \quad (5)$$

is „a complex linear frame” at a $x \in V$

Let $C(V, GL(n; \mathbb{C}))$, the bundle of complex linear frames (principal fibre bundle over V).

A linear connection on V if it satisfies

$$\nabla J = 0 \quad (6)$$

(∇ is covariant differentiation), is said „almost complex linear connection”.

The tensor field N of type (1,2) given by

$$N(X, Y) = \frac{1}{2} \{ [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] \} \quad (7)$$

$$\forall X, Y \in X(V)$$

is said „torsion of J ”.

Definition: For a linear connection Γ with covariant differentiation ∇ , a linear connection $\bar{\Gamma}$ whose $\bar{\nabla}$ is defined by,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} J((\nabla_X J) Y) \quad \forall X, Y \in X(V) \quad (8)$$

is said „ $\bar{\nabla}$ — connection”.

The torsion $\bar{T}$ of $\bar{\nabla}$ is given by

$$\bar{T}(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y] \quad (9)$$

The torsion T of ∇ is given by

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (10)$$

The curvature $\bar{R}$ of $\bar{\nabla}$ is given by

$$\bar{R}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}. \quad (11)$$

From the defining of $\bar{\nabla}$, we obtain:

Theorem 1. $\bar{\Gamma}$ is „almost complex linear connection” on V_{2n} .

Proof. We have

$$(a) \quad (\bar{\nabla} J) Y = \bar{\nabla}_X J(Y) - J(\bar{\nabla}_X Y)$$

$$(b) \quad \bar{\nabla}_X J(Y) = \bar{\nabla}_X J(Y) - \frac{1}{2} J((\nabla_X J) J(Y))$$

$$(c) \quad J(\bar{\nabla}_X Y) = J(\bar{\nabla}_X Y) + \frac{1}{2} (\nabla_X J) Y = \nabla_X J(Y) - \nabla_X J(Y) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\nabla_X J) Y = \nabla_X J(Y) - \frac{1}{2} (\nabla_X J) Y$$

$$(d) \quad J((\nabla_X J) J(Y)) = J(\nabla J^2(Y) - J(\nabla_X J(Y))) = -J(\nabla_X Y) + \Delta_X J(Y) = (\nabla_X J) Y$$

From (c) and (d) we obtain

$$(e) \quad J(\bar{\nabla}_X Y) = \nabla_X J(Y) - \frac{1}{2} J((\nabla_X J) J(Y))$$

From (e) and (b) we obtain

$$\bar{\nabla}_X J(Y) = J(\bar{\nabla}_X Y) \quad \forall X, Y \quad (12)$$

Thus, showing (and (a)) that $\bar{\Gamma}_,$ is an almost complex linear connection''.

Corollary 1:

$$\bar{T}(JX, JY) - \bar{T}(X, Y) - J(\bar{T}(JX, Y)) - J(\bar{T}(X, JY)) = -\frac{1}{2} N(X, Y)$$

This is an immediate consequence of the formulas (9) and the theorem 1.

Corollary 2: $\bar{R}(X, Y) \circ J = J \circ \bar{R}(X, Y)$

This is an immediate from the formulas (11) and the theorem 1.

Theorem 2. For a linear connection Γ an almost complex manifold V_{2n} , if T is given by,

$$2T(X, Y) = J((\nabla_X J) Y) - J((\nabla_Y J) X) \quad (13)$$

then a) $\bar{\Gamma}$ is a connection in the bundle $C(V, GL(n; C))$.

b) J — almost complex structure on V , is a complex structure

Proof. a. Since $\bar{\Gamma}$ is a almost complex linear connection from theorem 1, it is a connection in the bundle $C(V, GL(n; c))$

b) We have

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} J((\nabla_X J) Y)$$

$$\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X - \frac{1}{2} J((\nabla_Y J) X)$$

$$\bar{T}(X, Y) = T(X, Y) - \frac{1}{2} J((\nabla_X J) Y) + \frac{1}{2} J((\nabla_Y J) X) \quad (14)$$

From (14) and (15), we obtain

$$\bar{T}(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \quad (15)$$

Hence, $\bar{\Gamma}$ has no torsion.

From (14) and corollary, 1, We obtain

$$N = 0 \quad (16)$$

Hence, almost complex structure J is integrable, and hence is a complex structure.

If Γ is an V — connection ([3])

$$\nabla_X J(Y) + \nabla_Y J(X) = J(\nabla_X Y + \nabla_Y X) \quad (17)$$

then a) $\bar{\nabla}$ -is almost complex linear connection on V

$$b) \quad \bar{T}(X, Y) = T(X, Y) + J((\nabla_Y J)X)$$

BIBLIOGRAPHY

- [1] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu, *Foundations of differential geometry* vol. II Interscience Publishers New-York 1969
- [2] Yano K, *Differential Geometry on complex and Almost Complex Spaces* Pergamon Press 1965
- [3] R. S. Mishra *On almost complex manifolds* III Tensor N. S. vol. 20 1969, 361—62
- [4] G. Vranceanu *Lecții de geometrie diferențială*,

Editura Acad. R.S.R. București.

Received on 25th V 1970

University of Craiova
Faculty of mathematic-mechanics

SPAȚII LOCAL EUCLIDIENE A_2 CU CARACTERISTICE DREPT PARALELE DE SPEȚA A DOUA

ION D. TEODORESCU, NICOLAE I. NEDIȚĂ
 și LIVIU NICOLESCU

În această lucrare se cercetează cazul spațiilor local euclidiene A_2 cu caracteristice drepte paralele de a doua speță, obținându-se formele canonice ale conexiunii afine; de asemenea, se studiază problema echivalenței în mare a acestor spații.

★

Să considerăm că spațiul A_2 cu conexiune afină Γ_{jk}^i ($i, j \dots = 1, 2$) este de speță a doua (v. [1]).

Presupunând că ambele familii de curbe caracteristice sînt drepte paralele, deci că spațiul A_2 este cu caracteristice drepte paralele, se știe [2]:

Conexiunea unui spațiu A_2 cu caracteristice drepte paralele de speța a doua, printr-o transformare liniară, poate fi adusă la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 2g - \rho, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = f, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = g, & \Gamma_{22}^2 &= 2f, \end{aligned} \quad (1)$$

unde ρ, f, g sînt funcții arbitrare de variabilele x, y .

Pentru acest spațiu ecuația diferențială a curbelor caracteristice este [1]

$$dx^2 dy = 0 \quad (2)$$

adică curbele caracteristice coincid cu curbele coordonate, dreptele $x = \text{const.}$ corespunzînd caracteristicilor duble. Transformările care păstrează ecuația (2) a curbelor caracteristice, deci condițiile [1]

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \quad 2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 = 0, \quad (3)$$



sînt de forma

$$x' = \varphi(x), \quad y' = by + b_0. \quad (4)$$

În adevăr, prin transformarea [3]

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \psi(y), \quad (5)$$

care conservă primele două condiții (3), conexiunea Γ_{jk}^i se transformă după legea *)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}'^1 &= \frac{1}{\varphi'} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} + \Gamma_{11}^1 \right), & \Gamma_{12}'^1 &= \frac{1}{\psi'} \Gamma_{12}^1, & \Gamma_{22}'^1 &= \frac{\varphi'}{\psi'^2} \Gamma_{2,2}^1 \\ \Gamma_{11}'^2 &= \frac{\psi'}{\varphi'^2} \Gamma_{11}^2, & \Gamma_{12}'^2 &= \frac{1}{\varphi'} \Gamma_{12}^2, & \Gamma_{22}'^2 &= \frac{1}{\psi'} \left(\frac{\psi''}{\psi'} + \Gamma_{22}^2 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Rezultă că, pentru conexiunea (1), ultima condiție (3) este satisfăcută numai dacă $\psi'' = 0$.

Însă, în general, transformarea (4) nu este o transformare *admisibilă* în A_2 ([4], II, p. 338); transformările *preferate* ([4], II, p. 361) sînt de forma (4) cu $\varphi(x) = ax + a_0$.

Observăm că, dacă Γ_{11}^1 este funcție numai de x , putem avea $\Gamma_{11}'^1 = 0$; ceea ce revine a presupune că $\rho = 2g$ cu $g = g(x) \neq 0^{**}$. Obținem, astfel, *conexiunea canonică*

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = f, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = g, & \Gamma_{22}^2 &= 2f, \end{aligned} \quad (7)$$

Un spațiu A_2 cu conexiune afină Γ_{jk}^i este *local euclidian* dacă tensorii de torsiune și de curbură sînt nuli ([4], II, p. 384). În acest caz, se asociază spațiului transformarea punctuală

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (8)$$

*) La o transformare de coordonate $x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n)$, conexiunea afină Γ_{jk}^i a unui spațiu $A_n(x^1, \dots, x^n)$ se schimbă după legea ([4], I, p. 162)

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma_{rs}^{i'} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^r \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

**) Cînd $g = 0$ (deci $\rho = g = 0$), spațiul A_2 este proiectiv euclidian (curbele caracteristice nedeterminate).

care este constituită din două soluții independente ale sistemului complet integrabil

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0, \quad (x^1 = x, x^2 = y). \quad (9)$$

Transformarea (8) aplică spațiul $A_2(x, y)$ în sau pe spațiul afin $E_2(u, v)$

Observăm că spațiul A_2 cu conexiune (1), fiind cu conexiune simetrică are tensorul de torsiune

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i \quad (10)$$

nul. Deci, un astfel de spațiu este local euclidian atunci când și tensorul de curbura

$$\Gamma_{jk1}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{j1}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{sk}^i \Gamma_{j1}^s - \Gamma_{s1}^i \Gamma_{jk}^s \quad (11)$$

este nul.

Dacă spațiul A_2 este local euclidian, se obțin clasele lui *Boruvka-Vrânceanu* [5] (v. și [4], II, p. 382; III, p. 131).

★

Avem:

Condiția necesară și suficientă ca un spațiu A_2 cu conexiune (1) să fie local euclidian este ca funcțiile ρ , f , g să satisfacă ecuațiile

$$3 \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + f^2 = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + g^2 - g\rho = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} - 2 \frac{\partial g}{\partial x} - fg = 0.$$

Oricărei soluții a acestor ecuații îi corespunde o conexiune euclidiană cu două dimensiuni. Pentru determinarea soluțiilor sistemului (12) sînt de considerat cazurile

$$f = g = 0: f = 0, g \neq 0; f \neq 0, g = 0 \text{ și } f \neq 0, g \neq 0. \quad (13)$$

Dacă $f = g = 0$, sistemul (12) se reduce la ecuația

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,$$

care ne arată că funcția ρ nu depinde de y ; fie $\rho = -\sigma(x)$. Deci, avem conexiunea [6], (v. și [7])

$$\Gamma_{11}^1 = \sigma(x), \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad (14)$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

unde $\sigma(x)$ este o funcție arbitrară de x . Dacă $\sigma(x)$ este un polinom, obținem o conexiune polinomială ([8], p. 145); în particular, pentru $\sigma = \varepsilon x$ ($\varepsilon = \pm 1$),

se obține una din formele canoanice ale unei *conexiuni liniare* ([9], p. 105; v. și [10]).

În acest caz, sistemul (9) devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma(x) \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0;$$

integrala generală a acestui sistem este (v. și [11])

$$V = k_1 \int e^{-\int \sigma(x) dx} dx + k_2 y + k_3.$$

Obținem că transformarea punctuală asociată conexiunii (14) este

$$u = \int e^{-\int \sigma(x) dx} dx, \quad v = y. \quad (14')$$

Dacă $\sigma \neq \pm \frac{1}{x}$, funcția exponențială fiind pozitivă, rezultă că transformarea (14') aplică spațiului $A_2(x, y)$ cu conexiunea (14) în spațiul afin $E_2(u, v)$: spațiul A_2 se desfășoară pe semiplanul afin $u > 0$

Cînd $\sigma = -\frac{1}{x}$, rezultă

$$u = \frac{x^2}{2}, \quad v = y;$$

deci, spațiul A_2 se desfășoară, de asemenea, pe semiplanul afin $u > 0$. Pentru $\sigma = \frac{1}{x}$, obținem

$$u = \ln |x|, \quad v = y$$

și transformarea punctuală nu este biunivocă.

Așadar, spațiul $A_2(x, y)$ cu conexiune (14) nu este echivalent în mare cu spațiul afin $E_2(u, v)$

Observăm că, prin transformarea (4) cu $\varphi = \ln \int e^{-\int \sigma dx} dx$, $b = 1$, $b_0 = 0$, avem $\Gamma_{11}^1 = -1$; obținem, astfel, conexiunea constantă ([4], II, p. 369)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -1, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

a cărei transformare asociată este

$$u = e^x, \quad v = y. \quad (15')$$

Dacă $f = 0$, $g \neq 0$, sistemul (12) se scrie

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} + g^2 - \rho g = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

avînd soluția generală $g = \sigma(x)$, $\rho = \sigma + \frac{\sigma'}{\sigma}$. Obținem *conexiunea*

$$\Gamma_{11}^1 = \sigma - \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \sigma, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad (16)$$

unde $\sigma = \sigma(x)$ este o funcție arbitrară de x . Pentru conexiunea (16), sistemul (9) se scrie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\sigma - \frac{\sigma'}{\sigma} \right) \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Din ultima ecuație obținem că

$$V = a(x)y + b(x);$$

din celelalte ecuații găsim că a și b satisfac ecuațiile

$$a' + \sigma a = 0, \quad b'' + \left(\sigma - \frac{\sigma'}{\sigma} \right) b' = 0.$$

În definitiv, integrala generală este

$$V = k_1 y e^{-\int \sigma dx} - k_2 e^{-\int \sigma dx} + k_3.$$

Deci, *conexiunii* (16) *i se asociază transformarea*

$$u = e^{-\int \sigma dx}, \quad v = y e^{-\int \sigma dx} \quad (16')$$

Dacă $\sigma \neq \pm \frac{1}{x}$, această transformare aplică spațiul $A_2(x, y)$ în spațiul afin $E_2(u, v)$: spațiul A_2 se desfășoară pe semiplanul $u > 0$.

Atunci cînd $\sigma = -\frac{1}{x}$, deci cînd* $\frac{\sigma'}{\sigma} - \sigma = 0$, obținem conexiunea

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{x}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad (17)$$

*) În general, $\sigma = -\frac{1}{x+k}$ (v. [7]); însă, prin transformarea $x' = x + k$, $y' = y$, avem $\sigma = -\frac{1}{x}$. Pentru $k = -1$, deci $\sigma = \frac{1}{1-x}$, se obține conexiunea pusă în evidență de prof. G. Vrănceanu [6].

a cărei transformare asociată este

$$u = x, \quad v = xy. \quad (17')$$

Însă, pentru $x = 0$ și y oarecare, avem $u = 0, v = 0$; deci axei y din spațiul A_2 îi corespunde originea din spațiul E_2 : transformarea (17') nu este biunivocă.

De altfel, conexiunea (17) este forma la care se aduce conexiunea (16) cu $\sigma - \frac{\sigma'}{\sigma} \neq 0$ prin transformarea (4) cu $\varphi = -e^{-\int \sigma dx}$, $b = 1$, $b_0 = 0$; este spațiul local euclidian A_2 cu conexiune (7).

Dacă $\sigma = \frac{1}{x}$, obținem conexiunea

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{2}{x}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{x}, & \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (17a)$$

transformarea asociată fiind transformarea proiectivă

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{y}{x}, \quad (17'a)$$

care nu realizează o corespondență biunivocă între punctele spațiilor A_2 și E_2 . Rezultă că spațiul A_2 cu conexiune (16) nu este echivalent în mare cu spațiul afin E_2 .

Prin transformarea (4) cu $\varphi = \int \sigma dx$, $b = 1$, $b_0 = 0$, conexiunea (16) se aduce la *conexiunea constantă* ([4], II, p. 369)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -1, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -1, & \Gamma_{22}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

transformarea asociată fiind dată de formulele

$$u = e^x, \quad v = y e^x; \quad (18')$$

spațiul A_2 se desfășoară deci pe semiplanul afin $u > 0$.

Observăm că conexiunea (16) este polinomială numai dacă $\sigma = \text{const.}$, avînd forma canonică (18).

În particular, pentru $\sigma = \frac{1}{1 + k e^x}$ sau $\sigma = \frac{e^{-x^2}}{\int e^{-x^2} dx}$ regăsim conexiunile date de *prof. G. Vrăncianu* [6]

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 1, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{1 + k e^x}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \end{aligned} \quad (16a)$$

unde k este o constantă, respectiv (v. și [7], unde $\sigma = \frac{e^{-x^2}}{1 - \int e^{-x^2} dx}$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 2x, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{e^{-x^2}}{\int e^{-x^2} dx}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0. \end{aligned} \quad (16b)$$

De altfel, acestea sînt formele la care se reduce conexiunea (16) printr-o transformare (4) astfel încît $\Gamma_{11}^1 = 1$ sau $\Gamma_{11}^1 = 2x$.

Dacă $f \neq 0$, $g = 0$, sistemul (12) devine

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + f^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

care admite soluția generală $\rho = -\sigma(x)$, $f = \frac{1}{y + k}$. Așadar, găsim *conexiunea*

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \sigma(x), \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{y + k}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{2}{y + k}, \end{aligned} \quad (19)$$

unde $\sigma(x) \neq 0$ este o funcție de x , k — o constantă; dacă $\sigma = 0$, spațiul A_2 este proiectiv euclidian.

În acest caz, sistemul (9) se scrie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y + k} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{2}{y + k} \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Din ultima ecuație, obținem

$$V = -\frac{a(x)}{y + k} + b(x);$$

atunci, din primele două ecuații găsim că a și b satisfac sistemul

$$a'' + \sigma a' = 0, \quad b' = 0,$$

Rezultă

$$V = -k_1 \frac{\int e^{-\int \sigma dx} dx}{y+k} - k_2 \frac{1}{y+k} + k^3$$

Deci, transformarea punctuală asociată conexiunii (19) poate fi luată sub forma

$$u = \frac{\int e^{-\int \sigma dx} dx}{y+k}, \quad v = \frac{1}{y+k}; \quad (19')$$

această transformare aplică spațiul $A_2(x, y)$ în spațiul afin $E_2(u, v)$. În adevăr, formulele (19') arată că, pentru $x = x_0$ și $y \rightarrow \infty$, avem $u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$; adică, curba coordonată $x = x_0$ din A_2 se transformă în E_2 într-o curbă care tinde către origine. După teorema lui Hadamard-Stoilov-Vrănceanu (v. [4], II, p. 360), spațiul A_2 nu este echivalent în mare cu spațiul E_2 .

Observăm, că, prin transformarea (4) cu $\varphi = \ln \int e^{-\int \sigma dx} dx$, $b = 1$, $b_0 = k$, conexiunea (19) se reduce la forma canonică

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -1, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{2}{y}, \end{aligned} \quad (20)$$

transformarea asociată fiind

$$u = \frac{e^x}{y}, \quad v = \frac{1}{y}. \quad (20')$$

Dacă $f \neq 0$, $g \neq 0$, din a doua, din ultima și din prima ecuație a sistemului (12) găsim

$$f = \frac{1}{y+\sigma}, \quad g = \frac{\sigma'}{y+\sigma} + (y+\sigma)\Phi, \quad \rho = 3(y+\sigma)\Phi + \psi$$

unde σ , Φ , ψ sînt funcții arbitrare de x ; din a treia ecuație, rezultă

$$\psi = \frac{-2\Phi^2(y+\sigma)^3 + \Phi'(y+\sigma)^2 + \sigma''}{\Phi(y+\sigma) + \sigma'},$$

care este o funcție de x numai dacă $\Phi = 0$. Deci, avem conexiunea

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{2\sigma'}{y+\sigma} - \frac{\sigma''}{\sigma'}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{y+\sigma}, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{\sigma'}{y+\sigma}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{2}{y+\sigma},\end{aligned}\quad (21)$$

unde $\sigma = \sigma(x)$ este o funcție arbitrară cu $\sigma'' \neq 0$; dacă $\sigma'' = 0$, deci dacă* $\sigma = a_1x + a_0$, atunci spațiul A_2 cu conexiune (21) este proiectiv euclidian. Ținând seama de (9), avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{2\sigma'}{y+\sigma} - \frac{\sigma''}{\sigma'} \right) \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y+\sigma} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma'}{y+\sigma} \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{2}{y+\sigma} \frac{\partial V}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Ultima ecuație ne dă

$$V = \frac{a(x)}{y+\sigma} + b(x);$$

din celelalte ecuații deducem

$$b' = 0, \quad \frac{a''}{a'} - \frac{\sigma''}{\sigma'} = 0.$$

Obținem

$$V = -k_1 \frac{\sigma}{y+\sigma} - k_2 \frac{1}{y+\sigma} + k^3.$$

Deci corespondența

$$u = \frac{\sigma}{y+\sigma}, \quad v = \frac{1}{y+\sigma} \quad (21')$$

aplică spațiul $A_2(x, y)$ cu conexiunea (21) în spațiul afin $E_2(u, v)$. În adevăr, pentru $x = x_0$ astfel încât $\sigma(x_0)$ să fie definită și diferită de zero, rezultă că dacă $y \rightarrow \infty$, atunci $u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$; cu alte cuvinte, imaginea în E_2 a curbei coordonate $x = x_0$ din A_2 este o curbă ce tinde către origine. Conform teoremei Hadamard—Stoilov—Vrănceanu, spațiul A_2 nu este echivalent global cu spațiul E_2 .

*) Putem avea totdeauna $\sigma = x + 1$, obținând conexiunea (11) din [6].

Prin transformarea (4) cu $\varphi = \sqrt{\sigma}$, $b = 1$, $b_0 = 0$, conexiunea (21) ia forma canonică

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{4x}{y+x^2} - \frac{1}{x}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{y+x^2}, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{2x}{y+x^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{2}{y+x^2},\end{aligned}\quad (22)$$

transformarea asociată fiind

$$u = \frac{x^2}{y+x^2}, \quad v = \frac{1}{y+x^2}. \quad (22')$$

Așadar, avem teorema:

Dacă curbele caracteristice ale unui spațiu local euclidian A_2 de speța a doua sînt drepte paralele, conexiunea spațiului poate fi adusă la una din formele canonice (15), (18), (20) sau (22).

Un astfel de spațiu nu este echivalent în mare cu spațiul afin.

Observăm că formele necanonice ale conexiunii unui spațiu A_2 de speța a doua cu drepte caracteristice paralele depind de o funcție arbitrară de o variabilă și de o constantă arbitrară; deci, în aceste cazuri, ținînd seama de (14'), (16'), (19') și (21'), rezultă teorema:

Corespondența dintre spațiul local euclidian $A_2(x, y)$ cu caracteristice drepte paralele de speța a doua și spațiul afin $E_2(u, v)$ depinde cel mult de o funcție arbitrară de o variabilă și de o constantă arbitrară.

BIBLIOGRAFIE

1. Ion D. Teodorescu, *Asupra spațiilor A_2 cu conexiune afină*, Studii și cercetări matematice, București, t. 20, nr. 5, 1968, p. 751—761.
2. Ion D. Teodorescu — Liviu Nicolescu, *Sur les espaces A_2 de la deuxième espèce à caractéristiques droites*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R., t. 13 (61), nr. 2, 1969, p. 245—253.
3. Ion D. Teodorescu, *Les espaces A_2 à connexion affine avec les caractéristiques droites*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R., t. 14 (62), nr. 4, 1970.
3. G. Vrănceanu, *Asupra reducerii la o formă canonică a ecuațiilor curbelor autoparalele ale unui spațiu A_2* , Com. Acad. R. P. R., t. II, nr. 9—10, 1952, p. 479—484.
4. G. Vrănceanu, *Leçons de Géométrie différentielle*; vol. I — II, Éd. de l'Acad. de la R.P.R., Bucarest, 1957; vol. III, Éd. de l'Acad. de la R.S.R., Bucarest et Gauthier-Villars, Paris, 1964.
5. O. Boruvka, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*, Publ. Fac. Sc. Brno, 85, 1926.
6. G. Vrănceanu, *Transformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessione affine euclidea*, Boll. Un. Math. Ital., ser. III, vol. 12, 1957, p. 145—153.
6. G. Vrănceanu, *Spații A_2 local euclidiene*, Com. Acad. R.P.R., t. IV, nr. 7-8, 1954, p. 335—340.
7. St. Petrescu, *Despre spațiile A_2 local euclidiene*, Bul. Inst. Polit. București, t. XVIII, fasc. 3—4, 1956, p. 67—80.
8. Ion D. Teodorescu, *Asupra spațiilor $A_2(x, y)$ cu conexiune afină polinomială, local euclidiene*, Com. Acad. R.P.R., t. XIII, nr. 5, 1963, p. 405—411.

9. Ion D. Teodorescu, *Sur les formes canoniques des connexions des espaces localement euclidiens A_2 à connexion linéaire*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R., nr. 4, 1967, p. 103—117.
10. Tiberiu Postelnicu, *Studiul spațiilor A_2 cu conexiune afină liniară, local euclidiene*, Studii și cercerări matematice, București, an. VIII, nr. 3—4, 1957, p. 279—301.
11. Ion D. Teodorescu, *Sur l'équivalence en grand des espaces localement euclidiens A_2 à connexion polynomiale*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.P.R., t. 8 (56), nr. 3—4, 1964, p. 213—227.
Primită la 1. II. 1970.

Universitatea București
Institutul pedagogic

ЛОКАЛЬНО-ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ВТОРОГО РОДА

Краткое содержание

Демонстрируется:

I. Если кривые характеристики локально-евклидова пространства A_2 второго рода параллельные прямые- связанность пространства может быть приведена к одному из канонических видов: (15), (18), (20) или (22).

Такое пространство не эквивалентно глобально-аффинному пространству.

II. Соответственность между локально-евклидовым пространством $A_2(x, y)$ с параллельными прямыми характеристиками второго рода и аффинным пространством $E_2(u, v)$ зависит в крайнем случае от арбитрарной функции переменных и от арбитрарной постоянной.

LES ESPACES LOCALEMENT EUCLIDIENS A_2 À CARACTÉRISTIQUES DROITES PARALLÈLES DE LA DEUXIÈME ESPÈCE

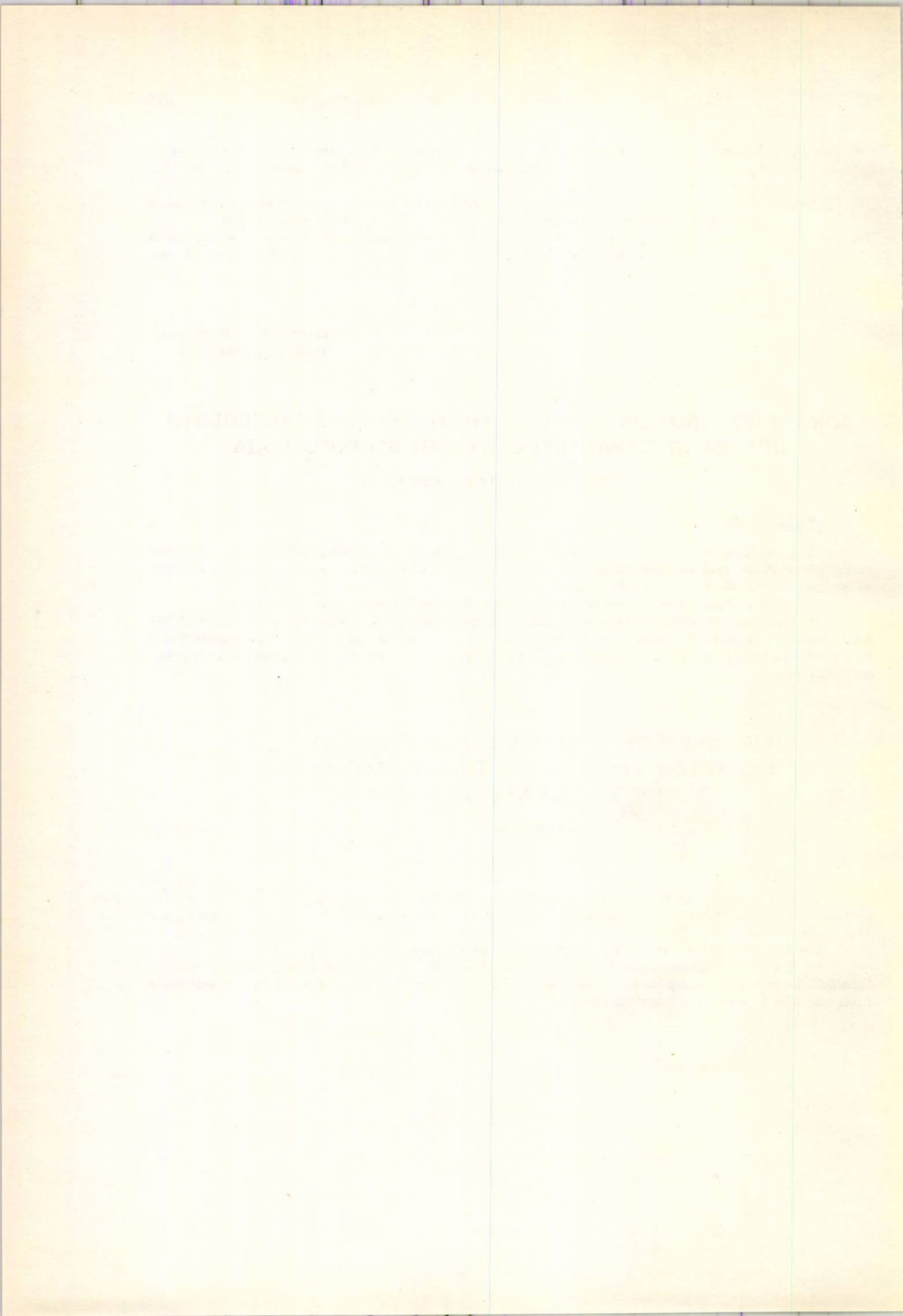
Résumé

On démontre:

I) Si les courbes caractéristiques d'un espace localement euclidien A_2 de la deuxième espèce sont des droites parallèles, la connexion de l'espace peut être réduite à l'une des formes canoniques (15), (18), (20) ou (22).

Un tel espace n'est pas équivalent en grand avec l'espace affine.

II) La correspondance entre l'espace localement euclidien $A_2(x, y)$ à caractéristiques droites parallèles de la deuxième espèce et l'espace affine $E_2(u, v)$ dépend au plus d'une fonction arbitraire d'une variable et d'une constante arbitraire.



TENDINȚE DE DEZVOLTARE ÎN TEORIA ELASTICITĂȚII *)

P. P. TEODORESCU

După o introducere și un scurt istoric, se prezintă problemele fundamentale ale teoriei elasticității și metodele de rezolvare corespunzătoare; apoi se pun în evidență tendințele actuale de dezvoltare ale acestui capitol al mecanicii.

§1 Introducere

1.1. După cum se știe, mecanica solidelor deformabile are ca obiect determinarea stării de solicitare (stare de tensiune și stare de deformare) a unui corp solid supus acțiunii unor sarcini exterioare în echilibru (static sau dinamic). Starea de tensiune este precizată cu ajutorul tensorului tensiune T_0 (eventual un tensor echivalent), iar starea de deformare prin vectorul deplasare $\vec{u}$ (eventual cu ajutorul unui tensor deformație T_e). Pentru determinarea stării de solicitare se face un studiu teoretic local, de natură geometrică și mecanică, permițându-ne să ne referim la un punct oarecare al unui corp oarecare. Dacă ne referim la un corp anumit și la o solicitare anumită, ținem seama de condițiile la limită ale problemei, studiul local fiind astfel completat cu un studiu global, care face legătura dintre corpul considerat și celelalte corpuri. Se ajunge astfel la formularea celor trei probleme fundamentale ale mecanicii solidelor deformabile (condiții pe contur în tensiuni, condiții pe contur în deplasări, problema mixtă).

Aspectul mecanic și geometric al problemelor trebuie însă completat cu un aspect de natură fizică, experimentală, care precizează natura corpului solid considerat. Se introduce o anumită lege constitutivă a corpului solid deformabil, o anumită relație între tensiuni și deformări. De asemenea, legea fundamentală a corpului solid deformabil poate fi stabilită pe baza a diferite considerente și ipoteze de natură energetică, termodinamică etc. În

*) Raport prezentat la Conferința anuală a Societății de științe matematice din R.D. Germană, Magdeburg, februarie 1969.

particular, relațiile la care se ajunge (și în care intervin — de cele mai multe ori — invariantii tensorilor T_σ și T_ε) depind de anumiți coeficienți (constanți sau variabili), care se determină pe cale experimentală.

1.2. Sub acțiunea sarcinilor exterioare, corpul solid se deformează; dacă el își revine la forma sa inițială, când acțiunea acestor sarcini încetează să se mai exercite (fără a se produce vreun fenomen de histerezis), vom spune că avem de-a face cu un corp elastic. În acest caz fenomenul de deformare este reversibil. Forma deformată a corpului solid este deci condiționată numai de sarcinile exterioare ce acționează în acel moment asupra sa. Între tensiuni și deformații trebuie să existe o legătură biunivocă, iar starea de tensiune într-un punct al corpului solid va depinde numai de starea de deformare din vecinătatea acelui punct.

Ca un capitol al mecanicii solidelor deformabile, teoria elasticității are ca obiect determinarea stării de sollicitare a unui corp solid elastic supus acțiunii unor sarcini exterioare în echilibru (static sau dinamic). La ecuațiile fundamentale ale mecanicii solidelor deformabile se adaugă o lege constitutivă, care caracterizează corpul elastic respectiv.

§2. Scurt istoric

2.1. Începuturile teoriei elasticității se confundă cu începuturile rezistenței materialelor (această proprietate a lor nereieșind destul de clar în evidență), fiind impuse de practică. Probleme de rezistența materialelor și-au pus și au rezolvat — într-o anumită formă — constructori celebri, cum a fost Arhit din Tarent (aprox. 440—360 î.e.n.), mecanicieni ca Arhimede (287—212 î.e.n.) sau arhitecți ca Vitruvius (a doua jumătate a sec. I î.e.n.).

Multe din cunoștințele căpătate înainte de era noastră sau la începutul acestei ere s-au pierdut în decursul epocii feudale fiind regăsite de-abia în timpul Renașterii. Leonardo da Vinci (1452—1519) face încercări la rupere asupra unui fir de oțel, iar Galileo Galilei (1564—1642) arată cum se poate experimenta o bară la întindere; el este primul care admite o anumită distribuție de tensiuni într-o bară în consolă, acționată la capătul liber de o forță concentrată. Arhitectul Fontana (1543—1607) folosește asemenea rezultate pentru ridicarea unui obelisc la Vatican.

Robert Hooke (1635—1703), bazat pe diferite experiențe, enunță în 1678 celebra sa lege „ut tensio sic vis” (cît este întinderea atît este forța). Edmé Mariotte (1620—1684) verifică această lege pe epruvete de lemn. Idei prețioase legate de noțiunea de elasticitate enunță Mihail Vasilievici Lomonosov (1711—1765).

În secolele XVII și XVIII se realizează progrese, în special în domeniul rezistenței materialelor. Menționăm, de asemenea, unele rezultate teoretice obținute de frații Jacob (1654—1705) și Jean (1667—1748) Bernoulli (primului i se datorește ipoteza secțiunilor plane la bare drepte), de fiul celui din urmă, Daniel Bernoulli (1700—1782), de nepotul acestuia, Jacques Bernoulli

(1759—1789), și, în special, de Leonhard Euler (1707—1783) și Joseph — Louis Lagrange (1736—1813), care se ocupă de problema deformării barelor elastice subțiri.

Alte cercetări teoretice și experimentale se datoresc lui Charles-Augustin de Coulomb (1736—1806), Jean-Victor Poncelet (1788—1867) și Franz Grashoff (1826—1893). Jean Le Rond d'Alembert (1717—1783) și Peter Gustav Lejeune—Dirichlet (1805—1859) contribuie, prin studiile lor în domeniul mecanicii, la nașterea teoriei elasticității.

2.2. Bazele teoriei matematice a elasticității s-au pus la începutul secolului al XIX-lea, prin lucrările lui Louis-Marie-Henri-Navier (1785—1836) și Mihail Vasilievici Ostrogradskii (1801—1861); dar cel care, folosind aceste rezultate, a stabilit ecuațiile fundamentale ale corpurilor elastice *) (ecuațiile de echilibru și relațiile dintre deplasări și deformări, în caz liniar), sub forma care se utilizează astăzi, a fost Augustin — Louis Cauchy (1789—1857). Siméon-Denis Poisson (1781—1840) contribuie la clarificarea acestor probleme, introducând și noțiunea de contracție transversală, iar Benoît—Paul—Émile Clapeyron (1799—1864) stabilește o teoremă de echivalență a lucrului mecanic interior (de deformare) cu lucrul mecanic exterior. Lui Gabriel Lamé (1795—1870) i se datorește, în special, formularea în deplasări a problemelor fundamentale ale teoriei elasticității, precum și un important tratat de teoria elasticității, în care este formulată și celebra problemă a paralelipipedului elastic, care a fost rezolvată satisfăcător de-abia în ultimii ani; de asemenea, pornind de la studiile lui Karl Friederich Gauss (1777—1855), el introduce utilizarea sistematică a coordonatelor curbilini la rezolvarea problemelor teoriei elasticității.

În acest timp ia o dezvoltare mare și rezistența materialelor, mai ales în ceea ce privește studiul plăcilor plane și problemele legate de proiectarea podurilor de cale ferată. În legătură cu problema plăcilor plane putem aminti astfel, în afară de numele lui Lagrange, pe Sophie Germain (1776—1831) și Gustav Kirchhoff (1824—1887), care au continuat — sub formă teoretică — cercetările experimentale începute de Ernst Florens Friederich Chladni (1756—1827).

O controversă (care a durat câteva decenii) privind constantele elastice ale materialelor a opus pe partizanii concepției conform căreia o singură constantă elastică este suficientă pentru a caracteriza proprietățile mecanice ale materialului (Navier, Cauchy și elevii lor), celor care susțineau că sînt necesare două constante elastice. George Green (1793—1841), pornind de la considerente de natură energetică, a arătat că, în cazul general de anizotropie, sînt necesare 21 constante elastice, care — pentru corpurile izotrope — se reduc la două constante distincte. Adolf Iakovlevici Kupffer (1799—1865), la laboratorul de greutate și măsuri din Petrograd, și Wilhelm Wertheim (1815—1861), la Paris, ulterior Franz Ernst Neumann (1798—1895)

*) Valabile pentru corpuri solide deformabile oarecare.

și elevii săi Kirchhoff și Woldemar Voigt (1850—1919), au făcut cercetări experimentale, prin care au verificat considerațiile teoretice ale lui Green. Cele două constante elastice care se folosesc în mod obișnuit sînt modulul de elasticitate longitudinală, studiat de Thomas Young (1773—1829), și coeficientul de contracție transversală al lui Poisson. Între constantele elastice care caracterizează corpurile anizotrope, menționăm coeficienții lui N. G. Cențov.

2.3. În Anglia, George-Biddell Airy (1801—1892) pune, în 1862, bazele teoriei plane a elasticității, prin introducerea funcției de tensiune (prima funcție potențial de tensiune în teoria elasticității) care azi îi poartă numele. George Gabriel Stokes (1819—1903) a avut multe rezultate importante, în special în domeniul vibrațiilor corpurilor elastice, introducînd — de asemenea — funcții potențial de deplasare.

În Franța trebuie să menționăm, mai ales, studiile lui Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant (1797—1886), ale cărui idei — este interesant de menționat — nu au apărut în volum ci au fost publicate sub formă de articole, memorii, note sau appendice la editările pe care le-a făcut la cursul lui Navier și la tratatul lui Rudolf Friederich Alfred Clebsch (1833—1872); chiar și ecuațiile de continuitate care îi poartă numele sînt cuprinse aici. Printre multiplele studii ale lui Saint-Venant remarcăm, în special, pe cele referitoare la problema torsiunii barei drepte care stau la baza cercetărilor moderne în această direcție; aici s-a aplicat, pentru prima dată, metoda semi-inversă de calcul.

Prima formulare a problemei termoelasticității, în cazul ecuațiilor necuplate, a fost dată în deplasări de Jean-Marie-Constant Duhamel (1797—1872) și Neumann. Multe din rezultatele cercetărilor lui Neumann sînt cuprinse în tratatul său asupra problemelor teoriei elasticității și opticii; menționăm astfel studiile întreprinse de el în domeniul dublei refracții, prin care continuă și precizează rezultatele obținute de David Brewster (1781—1868) și Ludwig-Friederich Seebeck (1805—1849). Aceste studii constituie baza fizică a fotoelasticității. Ecuațiile cuplate ale termoelasticității și formularea problemelor ei sub forma cea mai generală se datoresc altor cercetări, care ulterior au completat ecuația de propagare a căldurii a lui François-Marie-Charles Fourier (1772—1837) cu termenii corespunzători deformării elastice a corpului.

Kirchhoff demonstrează, în anumite condiții, teorema de unicitate a soluției problemei teoriei elasticității. În problema existenței soluției ecuațiilor elasticității, primele studii au fost făcute de către William Thomson (lord Kelvin) (1824—1907); problema a fost reluată de Arthur Korn, prin metoda aproximațiilor succesive, și de Erik Ivar Fredholm (1866—1927), prin metoda ecuațiilor integrale.

Clebsch, ale cărui rezultate sînt cuprinse în majoritate în cartea sa, aduce importante contribuții la problema plană a teoriei elasticității (condiții pe contur, reprezentarea deplasărilor etc.). De asemenea, el se ocupă de vibrațiile sferei elastice; în particular, pentru cazul static, se obțin rezultate

pe care le va discuta ulterior, în amănunt, Thomson. Acesta aduce contribuții numeroase la teoria elasticității, cum este, de exemplu, utilizarea funcțiilor conjugate — introduse de Clebsch — pentru rezolvarea problemei torziunii a lui Saint-Venant. Credem însă că cea mai importantă contribuție a sa constă în legătura făcută între problemele de elasticitate și cele de termodinamică; cu această ocazie, lord Kelvin a arătat că lucrul mecanic specific de deformare nu depinde în nici un fel de modul în care s-a obținut deformarea corpului, ci numai de mărirea acesteia. Împreună cu Peter-Guthrie Tait (1831—1901), el publică primele două volume (care cuprind mai ales probleme de mecanică și teoria elasticității), ale unui vast tratat de fizică teoretică, ce nu a putut fi terminat.

2.4. Lui James Clerk Maxwell (1831—1879), în afară de importantele ecuații relative la câmpul electromagnetic, i se datoresc primele studii fotoelastice complete privitoare la unele domenii plane (între care și domenii pentru care existau soluții teoretice); de asemenea, pornind de la reprezentarea lui Airy pentru problema plană, el stabilește rezultate similare pentru rezolvarea în tensiuni a problemei spațiale. O reprezentare analoagă se datorește lui Giacinto Morera (1856—1909); trebuie să menționăm că amîndouă aceste reprezentări au dezavantajul de a nu verifica ecuațiile de continuitate în tensiuni, stabilite de Eugenio Beltrami (1835—1900), care a menționat și unitatea dintre reprezentările lui Maxwell și Morera, caracterul tensorial al acestora fiind pus în evidență de Bruno Finzi (n. 1899), și completate de John Henry Michell (1863—1940), în cazul unor forțe volumice oarecare. Reprezentări care să țină seama și de aceste ecuații s-au dat de abia foarte recent.

Maxwell stabilește o relație de reciprocitate a deformațiilor în cazul particular al acțiunii a două sarcini concentrate oarecare; acest rezultat a fost generalizat de Enrico Betti (1823—1892) pentru sisteme de sarcini oarecare (teoreme de reciprocitate a lucrului mecanic) și de John William Strutt (lord Rayleigh) (1842—1919) pentru cazul dinamic. O altă generalizare a acestor rezultate se datorește lui Carlo Somigliana.

Noțiunea de energie de deformare, folosită întâi de Green, începe să joace un rol din ce în ce mai important. Astfel, Alberto Castigliano (1847—1884), continuînd studiile începute și completînd rezultatele nedemonstrate enunțate de Ludovico Federico Menabrea (1809—1896), stabilește rezultatele privind determinarea tensiunilor sau deformațiilor într-un punct al unui corp solid elastic. Rezultatele sale sînt valabile în cazul existenței unei relații liniare între tensiuni și deformații (legea lui Hooke); pentru cazul în care această relație nu este liniară, trebuie introdusă energia complementară, noțiune ce se datorește lui Friederich Engesser (1848—1931). Rezultatele sale completează pe cele datorite lui Green.

O contribuție importantă aduce și școala germană de rezistența materialelor. Emil Winkler (1835—1888) contribuie la studiul grinzii drepte pe mediu elastic. Lui Cristian Otto Mohr (1835—1918) i se datorește reprezentarea grafică a stării de tensiune și a stării de deformare în jurul unui punct cu ajutorul unui cerc (caz plan) sau a trei cercuri (caz spațial); de

altfel, această reprezentare este valabilă pentru un tensor simetric de ordinul al doilea oarecare. August Föppl (1854—1924) a scris un tratat în șase volume, privind mecanica tehnică, dintre care al treilea este dedicat rezistenței materialelor, avînd o completare cu principalele rezultate din teoria elasticității, iar al cincilea, apărut ulterior, este destinat numai teoriei elasticității. Ca și cartea privind tensiunile și deformațiile, scrisă ulterior, împreună cu fiul său Ludwig Föppl (n. 1887), aceste lucrări au jucat un rol important, făcînd cunoscute realizările teoriei elasticității în cercuri foarte largi, în special ingineresti; primele lucrări au fost traduse în acel timp, în limbile rusă și franceză.

2.5. Elevii lui Saint-Venant au continuat cu succes studiile începute de acesta. Cel mai de seamă dintre acești elevi a fost Joseph Valentin Boussinesq (1842—1929); lui i se datorează aplicarea teoriei potențialului la problemele statice și dinamice ale elasticității. Ca o aplicație, Boussinesq stabilește starea de tensiune în interiorul semispațiului elastic supus acțiunii unei forțe normale concentrate sau unei sarcini repartizate pe planul de separație. Alfred Aimé Flamant studiază problema plană corespunzătoare (cazul semiplanului elastic). Michell va folosi aceste rezultate la studiul unei serii întregi de probleme plane în teoria elasticității, în coordonate polare, în special la studiul influenței forțelor concentrate interioare. Un alt elev al lui Saint-Venant, Maurice Lévy (1838—1910) se ocupă de problema plană a teoriei elasticității, în special în cazul penei elastice. Atît lui cît și lui Michell li se datorește o teoremă importantă, conform căreia starea de tensiune, în caz plan, pentru un domeniu simplu conex, fiind date tensiunile pe contur, în absența forțelor masice, nu depinde de constantele elastice ale materialului.

Lord Rayleigh aduce contribuții importante la teoria vibrațiilor (elastodinamica), cele mai însemnate rezultate ale sale fiind cuprinse într-un tratat destinat teoriei sunetelor. Metoda de calcul indicată de el a fost reluată de Walter Ritz (1878—1909) și este cunoscută astăzi sub numele de metoda variațională Rayleigh-Ritz. O altă metodă variațională, des utilizată în practica de calcul, a fost elaborată ulterior de Erich Immanuel Trefftz (1888—1937). Pornind de la rezultatele date de lord Rayleigh, Horace Lamb (1849—1934) și Augustus-Edward-Hough Love (1863—1940) au făcut diferite studii privitoare la vibrațiile plăcilor subțiri. Ultimului i se datorează un important tratat de teoria elasticității, care a apărut în multe ediții ulterioare și a jucat un rol important în informarea științifică a mai multor generații, fiind folosit cu succes și astăzi.

În acest timp a fost publicată și una din cele mai dezvoltate istorii a teoriei elasticității pînă în momentul respectiv, de către Isaac Todhunter (1820—1884) și Karl Pearson (1857—1936).

Voigt, cu ocazia problemei constantelor elastice, s-a ocupat și de natura corpurilor solide, considerînd un anumit tip de corpuri viscoelastice; el este primul care introduce noțiunea de tensor în teoria elasticității. Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821—1894) este cunoscut pentru studiile sale în domeniul cinematicii mișcării. Heinrich Rudolf Hertz (1857—1894)

face cercetări în domeniul durității materialelor și al solicitărilor locale (probleme de contact).

În problema plană a teoriei elasticității se face distincție între starea de tensiune plană (problema cilindrului scurt) și starea de deformare plană (problema cilindrului lung — teoretic de lungime infinită). După cercetările lui Airy, Maxwell, Lévy, Flamant, deja menționate, urmează alte studii, problema suscitând un interes deosebit, atât din punctul de vedere teoretic cât și din punctul de vedere practic. În Rusia se remarcă cercetările lui Aksel Wilhelmovici Gadolin (1828—1892) și Harlampii Sergheevici Golovin (1844—1904), care se ocupă de un caz de stare de deformare plană, studiind problema cilindrului groși. Stokes aplică rezultatele lui Flamant la studiul aproximativ al grinzii drepte. Între problemele plane considerate de Michell, menționăm, în special, pana elastică. Un prim studiu detaliat al problemei plane, folosind polinoame biarmonice (ceea ce numim astăzi metode elementare de calcul), a fost făcut de Augustin-Charles-Marie Mesnager (1862—1933).

2.6. În Rusia, cercetările în această direcție sînt la început legate de natura materialelor și de problemele impuse de tehnică (cercetări de rezistența materialelor). Trebuie însă să menționăm rezultatele date de Nikolai Mihailovici Beliaev (1890—1944) în teoria elasticității. Ivan Grigorievici Bubnov (1872—1919) s-a remarcat prin studiile sale în domeniul plăcilor plane; el a dat, de asemenea, o idee privind o metodă variațională de calcul. Această idee a fost reluată ulterior de Boris Grigorievici Galerkin (1871—1945) și utilizată cu succes în diferite probleme ale teoriei elasticității (astăzi este cunoscută sub numele de metoda Bubnov-Galerkin). Lui Boris Borisovici Golițin (1826—1916) i se datoresc ecuațiile micilor mișcări amortizate, într-un mediu elastic, în urma studiilor întreprinse asupra problemelor seismice. Alexandr Nicolaevici Dinnik (1876—1950) are diferite cercetări în direcția unor metode directe de calcul (metode variaționale), legate mai ales de probleme de stabilitate elastică; el s-a remarcat, de asemenea, în studiul problemei torsiunii după Saint-Venant. Importante metode aproximative de calcul, aplicate la variate probleme ale teoriei elasticității, a elaborat Alexei Nicolaevici Krilov (1863—1945). Lui i se datoresc studii interesante legate de teoria construcțiilor de corăbii.

Trebuie să observăm că unii dintre acești oameni de știință și-au început activitatea în Rusia prerevoluționară, multe din realizările lor fiind însă obținute în timpul regimului sovietic; de aceea ei sînt considerați, în același timp, oameni de știință sovietici.

Lucrări privitoare la apropierea dintre teoria matematică a elasticității și mecanica construcțiilor se datoresc lui Victor Lvovici Kirpicev (1845—1913). Unele observații făcute de renumitul inventator rus Ivan Petrovici Kulibin (1735—1818) au fost reluate și precizate de Dmitrii Ivanovici Juravskii (1821—1891), care a completat astfel, prin formulele sale privitoare la tensiunile tangențiale, rezultatele date de Navier în problema grinzii drepte. Studiile lui Juravskii au folosit ulterior lui Jacques-Antoine-Charles

Bresse (1822—1883) pentru o exprimare generală a tensiunilor care apar într-o grindă dreaptă.

O contribuție importantă la rezolvarea în deplasări a problemelor teoriei elasticității a adus Galerkin, exprimând componentele vectorului deplasare cu ajutorul a trei funcții biarmonice; Galerkin a aplicat aceste rezultate la numeroase probleme de elasticitate, de exemplu la problema plăcilor plane groase, formulele sale fiind generalizate ulterior în diferite moduri. Ulterior, Piotr Fedorovici Papkovici (1887—1946) exprimă soluția în deplasări a problemei generale a teoriei elasticității cu ajutorul a patru (sau eventual trei) funcții armonice, soluții ale ecuației lui Pierre Simon de Laplace (1749—1813); această reprezentare fusese prezentată anterior, într-o conferință, de G. Grodskii și a fost regăsită ulterior, în mod independent de Heinz Neuber (n. 1906). Ea este astăzi la baza a foarte numeroase studii de elasticitate, contribuind la rezolvarea a multor probleme la limită (fiind cunoscută în literatură sub numele de reprezentarea Papkovici-Neuber. Tot lui Papkovici i se datoresc numeroase studii în domeniul construcției de nave, de exemplu un prim studiu asupra dreptunghiului elastic. Tratatul său de teoria elasticității a fost o carte deosebit de prețioasă pentru multe generații de elsticieni sovietici.

2.7. În climatul imprimat la Göttingen de Felix Klein (1849—1925) și David Hilbert (1862—1943) se dezvoltă mulți cercetători în domeniul mecanicii solidelor deformabile. Menționăm astfel pe Ludwig Prandtl (1875—1953) care, în domeniul teoriei elasticității, se remarcă mai ales prin analogia de membrană pentru problema torsionii unei bare drepte. Un alt remarcabil reprezentant al acestei școli este Theodore von Kármán (1881—1963).

Problemele teoriei elasticității pentru corpuri multiplu conexe au fost studiate și puse pe o solidă bază matematică — prin introducerea distorsiunilor — de către Vito Volterra (1860—1940), ale cărui rezultate, datînd de la începutul acestui secol, au fost strînse într-un volum, publicat de fiul său Enrico Volterra.

Aplicarea metodelor ecuațiilor integrale la problemele teoriei elasticității se datorește lui Giuseppe Lauricella (1867—1913).

Teoriile de rezistență a materialelor iau un nou avînt prin lucrările lui Beltrami, Maksymilianus Tytus Huber (1872—1950), Heinrich Hencky (1885—1951) și Richard von Mises (1883—1953). Reprezentarea în spațiul tensiunilor principale, datorită lui Harald Malcolm Westergaard (1888—1950) este mult folosită.

Problema plană a teoriei elasticității capătă o dezvoltare deosebită, după studiile lui Charles-Henri Ribière și Louis-Napoleon-George Filon, care folosesc funcții armonice sub formă de serii Fourier sau integrale Fourier, obținute cu ajutorul unor termeni care sînt produse între linii trigonometrice și linii hiperbolice sau exponențiale. Alte soluții pe această cale sînt date la începutul secolului în teza de doctorat a lui Aloys Timpe. Aceste idei au căpătat actualmente o formă modernă în cadrul metodelor operaționale de calcul. Jacques-Salomon Hadamard (1865—1963) dă o metodă generală

de rezolvare a problemei biarmonice bidimensionale (aspectul matematic al problemei plane a teoriei elasticității). G. V. Kolosov dă o formulare a acestei probleme cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă; această metodă a fost dezvoltată apoi pe larg de Nikolai Ivanovici Mushelișvili (n. 1891) și de elevii lui, constituind una din cele mai frumoase realizări ale școlii sovietice de teoria elasticității. Rezultatele menționate sînt expuse pe larg de Mushelișvili în tratatul său, tradus în mai multe limbi.

2.8. Dintre tratatele de teoria elasticității, care au jucat un rol important în dezvoltarea acesteia, menționăm pe cele ale lui Henri Poincaré (1854—1912), Roberto Marcolongo și Eugène-Maurice-Pierre Cosserat (1866—1931), împreună cu fratele său François Cosserat, publicate la începutul acestui secol. Din 1914, cînd a apărut prima ediție în Rusia, și pînă în prezent, tratatele lui Stepan Prokofievici Timoșenko (n. 1878) au avut o deosebită influență asupra dezvoltării multor generații, fiind traduse în multe limbi; menționăm, în special, cartea sa privind teoria elasticității, editată — în ultimă ediție — împreună cu J. N. Goodier; prezintă interes, de asemenea, istoria sa a rezistenței materialelor, care cuprinde și o istorie a teoriei elasticității. În Uniunea Sovietică semnalăm tratatele lui Leonid Samuilovici Leibenzon (1879—1951) și Mihail Mitrofanovici Filonenko-Borodici (1885—1962). În Polonia a fost mult utilizat tratatul de teoria elasticității al lui Huber. Dintre tratatele cu caracter general, care cuprind și volume dedicate teoriei elasticității, menționăm tratatul de mecanică generală al lui Paul-Émile Appell (1855—1930) și ciclul de volume de fizică teoretică ale lui Arnold Sommerfeld (1868—1951).

2.9. Actualmente teoria elasticității s-a dezvoltat foarte mult, în multiple direcții, cuprinzînd metode noi de calcul atît analitice cît și numerice; din ce în ce mai multe discipline sînt alăturate teoriei elasticității, în cercetări cu caracter comun. Datorită acestei uriașe dezvoltări este foarte dificil de a trece, chiar sumar, în revistă pe cei mai însemnați oameni de știință care se ocupă de aceste probleme. De aceea am preferat să menționăm numai pe cercetătorii deveniți clasici și să prezentăm numai cercetările făcute pînă în primele decenii ale acestui secol.

În prezent se întreprind vaste studii de natură teoretică și experimentală în cadrul a diferite școli naționale, dintre care cităm — în primul rînd — realizările deosebit de importante obținute în Uniunea Sovietică în toate direcțiile moderne de cercetare ale teoriei elasticității. Dintre celelalte țări socialiste, cele mai avansate în această direcție sînt R. P. Polonă, R. S. România, R. S. F. Jugoslavia, R. S. Cehoslovacă și R. D. Germană. În afară de aceste țări, cităm, în ordinea importanței rezultatelor obținute, S. U. A. Anglia, R. F. a Germaniei, Italia, Austria, Japonia, Franța etc.

Am considerat necesar să prezentăm acest scurt istoric, pentru a ne putea da mai bine seama de stadiul actual al teoriei elasticității, ca și de tendințele sale de dezvoltare.

§3. Probleme fundamentale ale teoriei elasticității

3.1. În cele ce urmează ne vom situa în cazul clasic al unui corp izotrop și omogen, liniar elastic, în ipoteza micilor deformații și rotații.

În caz static, ecuațiile de echilibru se scriu sub forma

$$\sigma_{ji, j} + F_i = 0, \quad (3.1)$$

unde $\sigma_{ji} = \sigma_{ji}$ sînt componentele tensorului tensiune, funcții de clasa C^2 , iar F_i sînt componentele forței volumice, funcții continue. Vom raporta toate mărimile la un triedru triortogonal fix de referință $Ox_1x_2x_3$; indicii la dreapta virgulei indică derivare în raport cu variabilele respective.

Relațiile dintre deformații specifice și deplasări sînt de forma (Cauchy)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i, j} + u_{j, i}), \quad (3.2)$$

unde ε_{ij} sînt componentele tensorului deformație specifică, funcții de clasa C^2 , iar u_i sînt componentele vectorului deplasare, funcții de clasa C^3 . Aceste relații formează un sistem de 6 ecuații cu 3 funcții necunoscute (u_i). Deformațiile specifice trebuie să verifice ecuațiile de [continuitate (compatibilitate) ale lui Saint-Venant

$$\varepsilon_{ij, kl} + \varepsilon_{kl, ij} = \varepsilon_{ik, jl} + \varepsilon_{jl, ik}, \quad (3.3)$$

dintre care numai șase sînt distincte.

În cazul în care aceste condiții sînt îndeplinite, deplasările sînt date de formulele lui E. Cesàro

$$u_i^1 = u_i^0 + (x_i^1 - x_i^0) \omega_{ij}^0 + \int_{P_0 P_1} [\varepsilon_{ij} + (x_k^1 - x_k^0) \varepsilon_{ji, k} - \varepsilon_{kj, i}] dx_j, \quad (3.4)$$

integrarea făcîndu-se de-a lungul unui arc de curbă $P_0 P_1$ arbitrar; u_i^0 și ω_{ij}^0 sînt componentele deplasării, respectiv rotației corpului, considerat ca un rigid.

Tensiunile sînt legate de deformații specifice prin legea liniară (Hooke)

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3.5)$$

unde λ, μ sînt constantele elastice ale lui Lamé iar δ_{ij} este simbolul lui Kronecker; deformația specifică volumică, funcție de clasa C^2 , va fi dată de

$$\theta = \varepsilon_{i, i}. \quad (3.6)$$

Rezolvînd invers relațiile (3.5), găsim

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \theta \delta_{ij}, \quad (3.5')$$

unde suma tensiunilor normale θ , funcție de clasa C^2 , va fi dată de

$$\theta = \sigma_{i, i}. \quad (3.6')$$

Aici E este modulul de elasticitate longitudinală, iar G este modulul de elasticitate transversală; aceste constante elastice sînt legate de coeficientul de contracție transversală $0 \leq \nu \leq 0,5$ al lui Poisson, prin relația

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.7)$$

Între constantele elastice ale lui Lamé și constantele elastice de mai sus au loc relații simple

$$\lambda = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G. \quad (3.8)$$

Din (3. 5') și (3. 7) rezultă, cu ușurință, relația

$$\theta = \frac{1 - 2\nu}{E} \Theta = \frac{1}{3K} \Theta, \quad (3.9)$$

unde K este modulul de dilatație cubică.

Pentru un corp incompresibil ($\theta = 0$ pentru orice stare de solicitare) avem $\nu = 1/2$. În acest caz $E = 3G$, iar $\lambda = \infty$. Dacă $\theta = \Theta = 0$, cu $\nu \neq 1/2$, pentru o anumită stare de solicitare, avem de-a face cu o stare de deformare incompresibilă.

3.2. În felul acesta avem un sistem complet de 15 ecuații cu 15 funcții necunoscute, care trebuie verificat în interiorul unui domeniu D și pe frontiera C a acestuia (deocamdată admitem un domeniu simplu conex). Pentru rezolvarea unei probleme la limită trebuie date și condițiile pe frontieră.

În cazul primei probleme fundamentale se dau condiții în tensiuni, sub forma

$$\overset{n}{p}_i = \sigma_{ji} n_j, \quad (3.10)$$

unde $\overset{n}{p}_i$ sînt componentele încărcării pe elementul de frontieră de normală exterioară $\vec{n}(n_j)$. În cazul celei de-a doua probleme fundamentale (condiții pe frontieră în deplasări) se pun condițiile

$$u_i = \overset{n}{u}_i, \quad (3.10')$$

unde $\overset{n}{u}_i$ sînt deplasările punctului de pe frontieră de normală exterioară $\vec{n}$.

În cazul celei de-a treia probleme fundamentale (problema mixtă) se pun condiții de forme (3.10) pe o parte a frontierei (C_σ) și condiții de forma (3.10) pe restul frontierei ($C_u = C - C_\sigma$). Se pot considera și alte probleme mixte, mai mult sau mai puțin complexe.

3.3. Distingem între două formulări fundamentale ale problemelor teoriei elasticității: o formulare în tensiuni (utilă în cazul primei probleme fundamentale) și o formulare în deplasări (corespunzînd celorlalte două probleme).

Într-o rezolvare în deplasări se elimină tensiunile și deformările specifice între ecuațiile (3.1), (3.2) și (3.5) și se obțin ecuațiile lui Lamé

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + F_i = 0, \quad (3.11)$$

unde Δ este operatorul lui Laplace.

De aici rezultă cu ușurință că deformația specifică volumică verifică ecuația

$$\Delta \theta = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} F_{l,l}; \quad (3.12)$$

în lipsa forțelor volumice, θ este o funcție armonică

$$\Delta \theta = 0, \quad (3.12')$$

iar deplasările u_i sînt funcții biarmonice (ca funcții de clasa C^4)

$$\Delta \Delta u_i = 0. \quad (3.13)$$

Deplasările se pot prezenta, sub forma dată de Galerkin, cu ajutorul a trei funcții biarmonice Γ_i (componentele vectorului lui Galerkin)

$$\Delta \Delta \Gamma_i = 0. \quad (3.14)$$

sub forma

$$2Gu_i = 2(1 - \nu) \Delta \Gamma_i - \Gamma_{l,li}. \quad (3.15)$$

Reprezentarea dată de Grodskii, Papkovici și Neuber cu ajutorul a patru funcții armonice χ_0, χ_i (care se pot reduce la trei funcții dacă $\nu \neq 1/4$)

$$\Delta \chi_0 = 0, \quad \Delta \chi_i = 0 \quad (3.16)$$

se poate scrie

$$2Gu_i = \chi_i - \frac{1}{4(1 - \nu)} (\chi_i \chi_{l,l} + \chi_0)_{,i}. \quad (3.17)$$

3.4. Într-o formulare în tensiuni se elimină deformările specifice și deplasările între ecuațiile (3.1), (3.2) și (3.5) și se obțin ecuațiile de continuitate în tensiuni (Beltrami -Michell)

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} \Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1 - \nu} F_{l,l} \delta_{ij} - (F_{i,j} + F_{j,i}). \quad (3.18)$$

În mod analog se constată că suma tensiunilor normale verifică ecuația

$$\Delta \Theta = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu} F_{l,l}, \quad (3.19)$$

iar, în lipsa forțelor volumice, este o funcție armonică

$$\Delta \Theta = 0; \quad (3.19')$$

de asemenea, tensiunile sînt funcții biarmonice (ca funcții de clasa C^4)

$$\Delta \Delta \sigma_{ij} = 0 \quad (3.20)$$

Pentru ecuațiile de echilibru (3.1), în lipsa forțelor volumice, se poate introduce reprezentarea

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} F_{km,ln}, \quad (3.21)$$

cu ajutorul a 6 funcții de tensiune $F_{pq} = F_{qp}$, sub forma dată de B. Finzi; punînd $F_{12} = F_{23} = F_{31} = 0$, găsim reprezentarea dată de Maxwell și, punînd $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$, dăm peste reprezentarea lui Morera.

3.5. În caz dinamic, ecuațiile de echilibru se transformă în ecuații de mișcare, prin introducerea forțelor de inerție,

$$\sigma_{ji,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3.22)$$

ρ fiind masa specifică, iar punctele indicînd derivarea în raport cu timpul.

Funcțiile necunoscute vor depinde și de timp, iar condițiile pe contur se vor pune pentru $t \geq t_0$, unde t_0 este momentul inițial; la aceste condiții se adaugă condițiile inițiale

$$u_i = u_i^0(x_j), \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i^0(x_j) \quad (3.23)$$

unde $u_i^0, \dot{u}_i^0$ sînt deplasările, respectiv vitezele de deplasare la momentul $t = t_0$.

Ecuațiile lui Lamé capătă forma

$$\mu \square_2 u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + F_i = 0, \quad (3.24)$$

pe cînd deformația specifică volumică verifică ecuația

$$\square_1 \theta = - \frac{1}{\lambda + 2\mu} F_{l,l}, \quad (2.25)$$

iar, în lipsa forțelor volumice, simpla ecuație a undelor

$$\square_1 \theta = 0; \quad (3.25')$$

aici am introdus operatorii lui d'Alembert

$$\square_k = \Delta - \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (k = 1, 2), \quad (3.26)$$

unde viteza de propagare a undelor primare (longitudinale) c_1 este dată de

$$\frac{1}{c_1^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}, \quad (3.27)$$

iar viteza de propagare a undelor secundare (transversale) $c_2 < c_1$ este dată de

$$\frac{1}{c_2^2} = \frac{\rho}{\mu}. \quad (3.27')$$

Remarcăm că deplasările și tensiunile verifică aceeași dublă ecuație a undelor

$$\square_1 \square_2 \Omega(x_k; t) = 0 \quad (3.28)$$

§ 4. Metode de rezolvare a problemelor fundamentale ale teoriei elasticității

4.1. Vom indica pe scurt, în cele ce urmează, cele mai importante metode de calcul ce se folosesc pentru rezolvarea problemelor fundamentale ale teoriei elasticității. Noi am arătat deja unele etape în dezvoltarea acestor metode; în felul acesta se vor putea pune în evidență diferite aspecte pe care le-au luat aceste metode în prezent, precum și diferite tendințe de dezvoltare ale lor.

În special se folosesc două metode generale de calcul: metoda indirectă și metoda directă.

Metoda indirectă constă în a admite o anumită stare de tensiune în interiorul corpului, care să îndeplinească condițiile pe contur, și a verifica dacă toate ecuațiile teoriei elasticității sînt satisfăcute. În cazul în care acest lucru nu se întîmplă, se pot adăuga unele funcții de corecție care trebuie determinate; aceasta este, de fapt, o metodă semiindirectă de calcul.

Începînd cu studiul lui Saint-Venant referitor la răsucirea barei drepte, această metodă a căpătat diferite aspecte. Nu se pot emite reguli cu caracter general, modul de a căuta soluția fiind diferit de la problemă la problemă și depinzînd mult de ingeniozitatea cercetătorului.

Metoda directă de calcul constă în alegerea unor funcții (eventual funcții potențial), care să cuprindă anumiți parametri arbitrari; aceste funcții pot eventual să îndeplinească anumite condiții de paritate sau imparitate în raport cu variabilele problemei sau diferite condiții pe care le putem impune inițial, funcție de condițiile particulare date. Acești parametri trebuie determinați cu ajutorul condițiilor pe contur și condițiilor inițiale. Dacă putem determina în mod univoc acești parametri, îndeplinind toate condițiile la limită, problema este rezolvată. În caz contrar trebuie să alegem alte funcții cu ajutorul cărora să efectuăm calculul (sau să adăugăm funcții de corecție la funcțiile alese inițial).

Un alt aspect al metodelor directe de calcul constă în aceea că se poate ataca problema printr-o metodă relativ generală, care poate conduce la un calcul sistematic.

Evident că fiecare din aceste metode de calcul este adecvată pentru diverse cazuri particulare.

4.2. Din punct de vedere matematic, se poate face un calcul exact sau un calcul aproximativ. Sînt foarte rare cazurile în care un calcul exact ne conduce la rezultat, deoarece fenomenele fizice sînt — în general — complexe și nu pot fi cuprinse decît aproximativ în diferite forme matematice. De aceea, cele mai multe metode de calcul care se folosesc sînt metode aproximative

Aproximațiile pot proveni din alegerea funcțiilor necunoscute sub o formă ce aproximează forma lor reală cit de bine vrem (de exemplu sub forma de dezvoltări în serie) și care îndeplinesc în întregime ecuațiile diferențiale ale problemei și condițiile la limită sau din căutarea unor funcții care să îndeplinească aproximativ unele din aceste condiții (metoda diferențelor finite, unele metode variaționale, metoda punerii condițiilor pe contur în puncte etc); de asemenea — acest lucru se întâmplă destul de des — putem folosi ambele feluri de aproximații.

Pentru toate metodele de calcul ce se folosesc, utilizarea funcțiilor potențial este deosebit de utilă.

4.3. Am arătat în paragraful precedent cum se pot găsi funcții potențial (funcții de deplasare) pentru o rezolvare în deplasări a problemei elastostatice tridimensionale (reprezentările Galerkin și Papkovici-Neuber).

Tendința actuală este de a generaliza aceste rezultate pentru toate celelalte probleme, care sînt mai complexe. Astfel, în cazul dinamic, formularea (3.15) a lui Galerkin a fost generalizată, în 1949, de Maria Iacovache, sub forma

$$2Gu_i = 2(1 - \nu) \square_1 \Gamma_i - \Gamma_{i,li}, \quad (4.1)$$

unde funcțiile $\Gamma_i(x_k; t)$ verifică ecuația (3.27). E. Sternberg și R. A. Eubanks au generalizat, în 1957, în mod analog, reprezentarea Papkovici-Neuber.

Se știe că soluțiile problemelor elatostaticii și elastodinamicii sînt univoc determinate în anumite condiții la limită. În cazul reprezentărilor de tip Galerkin sau Iacovache, funcțiile de deplasare corespunzătoare nu mai sînt univoc determinate (există o triplă nedeterminare funcțională).

O problemă nerezolvată încă (de interes teoretic mai mult) este aceea de a arăta că, pentru $\nu \neq 1/4$, reprezentările de tip Papkovici-Neuber sau Sternberg-Eubanks sînt univoce (trei funcții de deplasare univoc determinate pentru o stare de deplasare dată). Ca un exemplu de asemenea tip de problemă, menționăm că, în cazul problemei plane a elasticității (stare de tensiune plană sau stare de deformare plană), funcția de tensiune a lui Airy este univoc determinată, abstracție făcînd de o constantă și un polinom omogen de gradul întîi (trei constante arbitrare).

4.4. Într-o rezolvare în tensiuni a problemei, reprezentarea lui B. Finzi a fost reluată în 1953 de H. Schaefer, care a arătat ce condiții trebuie să îndeplinească funcțiile de tensiune F_{pq} . Folosind și unele studii din 1949 ale lui G. Peretti, privitoare la o semnificație statică ale acestor șase funcții de tensiune, H. Schaefer face legătura dintre ecuațiile pe care trebuie să le verifice funcțiile F_{pq} pe frontieră și ecuațiile pe care le verifică eforturile într-o placă curbă subțire ce ar urma conturul corpului considerat. Rezultatele respective au fost aplicate la studiul semispațiului elastic și al unui cilindru circular, în caz axial simetric.

Revenind la problema plană, amintim că se poate face o legătură simplă între valorile funcției lui Airy și ale derivatelor sale de primul ordin și eforturile într-o bară curbă care ar urma conturul. O problemă nerezolvată încă este legătura similară care ar trebui făcută între eforturile în placa curbă subțire

ce ar urma frontiera și condițiile pe contur. Dacă s-ar putea găsi astfel (chiar rezolvînd o problemă pentru o placă curbă subțire, cu o anumită nedeterminare funcțională) condițiile la limită pe care trebuie să le îndeplinească fiecare funcție potențial în parte, s-ar ajunge la un rezultat deosebit de important: decuplarea nu numai a ecuațiilor problemei ci și a condițiilor la limită și reducerea problemelor teoriei elasticității la probleme clasice ale ecuațiilor fizicii matematice. Problema este deschisă (s-ar putea chiar ca să fie practic imposibilă).

O reprezentare în tensiuni, care ține seama de ecuațiile lui Beltrami, a fost dată în 1956 de P. P. Teodorescu sub forma

$$\sigma_{ij} = \Delta F_{ij} - \frac{1}{2 + \nu} F_{ll,ij} \quad (i = j), \quad (4.2)$$

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{2 + \nu} F_{ll,ij} + (f_{ki} - f_{jk}),_{,k} + \varphi_k (i \neq j \neq k \neq i), \quad (4.2')$$

fără sumare în raport cu k .

Funcțiile $F_{ij} = F_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ ($i = j$) sînt biarmonice

$$\Delta \Delta F_{ij} = 0 \quad (4.3)$$

și avem

$$F_{12} = F_{23} = F_{31} = 0. \quad (4.3')$$

Funcțiile de două variabile $f_{ij} = f_{ij}(x_i, x_j)$ sînt armonice

$$\Delta f_{ij} = 0, \quad (4.4)$$

iar funcțiile de trei variabile $\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, x_3)$ sînt, de asemenea, armonice

$$\Delta \varphi_k = 0. \quad (4.5)$$

Aceste funcții trebuie să verifice și sistemul de ecuații

$$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} = -\Delta \left(F_{kk} - \frac{1}{2 + \nu} F_{ll} \right),_{,k}, \quad (4.6)$$

fără sumare în raport cu k ; ca integrale particulare, putem alege funcțiile armonice

$$\varphi_k = \frac{\nu}{2(2 + \nu)} \iint \Delta F_{ll, kk} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \Delta \left(\int F_{i,j} dx_i + \int F_{j,i} dx_j \right), \quad (4.6')$$

fără sumare în raport cu i, j, k , avînd grijă să determinăm funcțiile arbitrare care intervin datorită integralelor nedefinite, astfel ca să fie verificat sistemul de ecuații (4.6).

Această reprezentare a fost generalizată, în 1960, pentru cazul dinamic.

4.5. Asemenea reprezentări prin funcții potențial au fost date pentru diferite probleme particulare ale teoriei elasticității.

În problema plană menționăm reprezentările lui G.-B. Airy (1862) și K. Marguerre (1933), în caz static, și L. Sobrero (1935) și P. P. Teodorescu (1956), în caz dinamic, cu funcții reale; reprezentări cu funcții de variabilă

completa au fost date de G. V. Kolosov — N. I. Mushelişvili și J. R. M. Radok (1950), ultimul în caz dinamic.

În problema antiplană menționăm reprezentările lui Prandtl și L. M. Milne-Thomson iar în problema axial simetrică reprezentarea clasică a lui Love.

Asemenea reprezentări au fost date, în ultimul timp, pentru diferite corpuri de corpuri (anizotrope, neomogene, cu asimetrie mecanică etc) sau pentru condiții mai complexe de solicitare.

Observăm că pentru a obține asemenea reprezentări și, în general, pentru un studiu preliminar al sistemelor de ecuații diferențiale corespunzătoare se poate folosi metoda matricelor asociate sistemelor de ecuații diferențiale (Gr. C. Moisil).

4.6. Între metodele de calcul mai importante (sau care sînt utilizate mai mult în ultimul timp) vom menționa (afară de metodele elementare) metodele variaționale (dezvoltate mult în ultimul timp în cadrul analizei funcționale), metodele operaționale (bazate pe transformări integrale), metoda diferențelor finite (cu diferitele ei aspecte, de exemplu metoda relaxării, dezvoltată de R. V. Southwell), metodele iterative (aproximații succesive), metoda colocațiilor (metoda punerii condițiilor în puncte de contur), metoda ecuațiilor integrale etc.

În cadrul metodelor operaționale, menționăm că se folosesc — în special — transformate Fourier; transformatele Mellin, Hankel etc. folosesc pentru studiul problemei în unele sisteme de coordonate particulare. Este de remarcă utilitatea unui studiu al transformărilor integrale în coordonate curbilinii oarecare. Observăm, de asemenea că transformata Laplace are aplicații în cazul problemelor dinamice cu condiții inițiale omogene; problemele sînt reduse astfel, formal, la probleme quasistatice.

În legătură cu metodele operaționale de calcul, putem menționa și posibilitățile pe care le oferă teoria distribuțiilor; aceasta permite să se înglobeze condițiile inițiale și condițiile pe frontieră în ecuațiile problemei. Se obțin astfel soluții fundamentale (corespunzătoare unor funcții Green), ținînd seama de posibilitatea de reprezentare a sarcinilor concentrate cu ajutorul distribuției lui Dirac și a derivatelor sale.

În metoda colocațiilor se pun condiții la limită într-un număr finit de puncte; metoda se dovedește deosebit de ușor de aplicat din punct de vedere practic, problema reducîndu-se la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu un mare număr de necunoscute.

În afara acestor metode, cu caracter general, menționăm unele metode ce se pot aplica la probleme particulare. De exemplu, în cazul problemelor plane și antiplane se poate aplica, cu succes, metoda funcțiilor de variabilă complexă (studiile lui G. V. Kolosov și N. I. Mushelişvili, ca și studiile lui L. M. Milne-Thomson etc); menționăm, de asemenea și utilizarea funcțiilor de variabilă hipercomplexă (L. Sobrero).

În toate aceste metode este adesea util să se folosească coordonate curbilinii oarecare, alese astfel încît frontiera domeniului considerat să fie formată

din linii de coordonate (în problema plană a teoriei elasticității, studiul cu caracter general al lui P. P. Teodorescu).

Evident, s-au dezvoltat diferite alte metode de calcul pentru probleme particulare. Vom mai menționa numai metoda analogiei (de exemplu, analogia de membrană a lui L. Prandtl) și metodele experimentale (fotoelasticitate, tensometrie, modele, modele prin analogie, metoda moiré-urilor etc).

Toate metodele de calcul menționate mai sus sînt în continuă dezvoltare și perfecționare.

§ 5. Tendințe de dezvoltare ale teoriei elasticității

5.1. În cele ce urmează vom încerca să punem în evidență, foarte pe scurt, câteva tendințe actuale de dezvoltare ale teoriei elasticității.

În primul rînd, menționăm studiul altor tipuri de corpuri (corpuri neclasice), avînd — în general — tot un caracter elastic, ca și studiul unor probleme neclasice ale teoriei elasticității.

Astfel, majoritatea studiilor făcute pentru corpuri izotrope au fost extinse pentru corpuri anizotrope în general sau pentru diferite cazuri particulare de anizotropie. De cele mai multe ori aceste generalizări nu prezintă dificultăți esențiale; evident, rezultatele au o formă mai complicată, depinzînd de cele 21 constante elastice care intervin. În caz static, ecuațiile armonice sau biarmonice care guvernează problema devin ecuații diferențiale de tip eliptic cu caracter general. În caz dinamic însă, problema se complică, undele elastice nemaiputîndu-se — în general — descompune în unde primare și unde secundare; de asemenea, este interesant de văzut forma pe care o iau undele de suprafață de tip Rayleigh, ca și alte tipuri de unde. Prezintă interes studiile făcute asupra unor asemenea corpuri de S. G. Lehnîțkii, J. Brilla și C. I. Borș.

În cazul corpurilor neomogene, problema se complică, coeficienții elastici ai materialului fiind funcții de punct. Vom distinge între neomogenitate discontinuă (corpuri stratificate) și neomogenitate continuă. În primul caz se pun condiții de continuitate a deplasărilor și tensiunilor pe suprafețele de separație, ecuațiile scriindu-se pentru fiecare subdomeniu în parte. În cazul unei neomogenități continue, coeficienții vor fi funcții continue de punct iar ecuațiile problemei vor fi cu coeficienți variabili; în cazul și numai în cazul în care corpul solid are o rigiditate constantă în plane paralele, adică în cazul în care avem

$$E = E_0 e^{ax_1 + bx_2 + cx_3} \quad (E_0, a, b, c = \text{const}; \quad \nu = \text{const}), \quad (5.1)$$

sistemul de ecuații al teoriei elasticității rămîne cu coeficienți constanți. Pentru asemenea corpuri s-au dat soluții în diferite cazuri particulare de neomogenitate. În caz general s-au dat algoritme de calcul prin aproximații succesive, de exemplu de către M. Predeleanu și P. P. Teodorescu. A. Radu a folosit metoda funcțiilor de variabilă complexă. Este important să obser-

văm că diferența dintre corpurile neomogene și cele anizotrope nu este încă suficient de bine precizată. Într-adevăr, să presupunem că avem de-a face cu un corp anizotrop și omogen, ale cărui proprietăți sînt exprimate în coordonate carteziane ortogonale. Printr-o trecere în coordonate curbilinii oarecare, se obține un corp cu proprietăți de anizotropie curbilinie. Dar coeficienții elastici ai unui asemenea corp vor fi funcție de coordonatele curbilinii ale punctului. Avem deci de-a face cu o neomogenitate formală. Pentru a avea un corp neomogen din punct de vedere fizic ar trebui ca acesta să fie neomogen în orice sistem de coordonate curbilinii, altminteri avem de-a face cu un corp omogen cu anizotropie curbilinie. Condițiile matematice care trebuie să pună în evidență aceste proprietăți nu sînt încă bine precizate. Vom menționa și utilizarea de variabile aleatoare în studiul unor corpuri neomogene statistic omogene (P. Mazilu).

Este interesant să observăm că variabilele aleatoare pot fi utile și în studiul altor probleme, de exemplu în unele probleme de vibrații, cu aplicații la vibrațiile autovehiculelor (Fl. Dincă).

Trecînd la o lege constitutivă neliniară ajungem la probleme care să aibă asemenea caracteristici, rămînînd în domeniul elastic; menționăm, de asemenea, corpurile hipo-sau hiperelastice.

Un pas înainte l-a constituit considerarea unui tensor tensiune asimetric; acesta a condus la introducerea de micromomente și a șase constante elastice ale materialului pentru o lege constitutivă liniară. În acest caz, rotația locală va juca — de asemenea — un rol important; vom distinge între corpuri cu rotații libere și corpuri cu rotații împiedicate, pentru care avem relația

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}, \quad (5.2)$$

unde $\vec{\Phi}$ este vectorul rotație locală. În acest din urmă caz (care cuprinde și cazul corpurilor elastice clasice), numărul constantelor elastice se reduce la patru. Asemenea corpuri poartă numele de corpuri de tip Cosserat, după frații Cosserat care au început să le studieze la începutul acestui secol. Începînd din 1958, ele au început să formeze obiectul a numeroase cercetări (W. Günther, R. D. Mindlin, H. Schaefer, E. L. Aero, E. V. Kuvşinskii, C. Truesdell, W. Noll, R. A. Toupin, G. Grioli, W. T. Koiter, V. A. Palmov, Cr. Teodosiu, N. Şandru, H. Neuber, S. Kessel, M. Mişicu, P. P. Teodorescu etc.).

În legătură cu aceste corpuri, trebuie să amintim și corpurile cu microstructură (R. D. Mindlin, C. A. Eringen, E. Soós, etc.). Este interesant de observat că anumite structuri de construcții pot fi approximate cu asemenea corpuri din punctul de vedere al calculului static.

5.2. În afară de neliniaritatea fizică, menționată mai sus, este important să punem în evidență și neliniaritatea geometrică, datorită relațiilor neliniare dintre deplasări și deformații specifice. Metodele tensoriale de calcul joacă un rol din ce în ce mai important, utilizarea coordonatelor curbilinii oarecare fiind esențială. Datorită acestei neliniarități, apare și o neliniaritate

de ordin mecanic — în ceea ce privește ecuațiile de echilibru și ecuațiile de mișcare.

Datorită dificultăților mari de calcul, se fac diferite aproximații, funcție de natura și forma corpului, ca și de problemele care se pun. Trebuie să distingem astfel între deformații mari și mici, rotații mari și mici; este posibilă — de asemenea — oricare din combinațiile care se pot face. Cazul clasic este cel al micilor deformații și rotații, ultima ipoteză fiind esențială pentru un calcul corect.

Trebuie să observăm că legile constitutive neliniare pot apare prin considerarea unui potențial elastic, care să nu depindă numai de gradientul întâi al deplasării (ca în caz clasic) ci și de gradientii de ordin superior; în cazul în care ne mărginim la gradientii de ordinul al doilea avem de-a face cu corpuri de gradul al doilea (corpuri bipolare). Studii cu caracter mai general se datoresc lui A. E. Green și R. S. Rivlin (corpuri multipolare). G. Grioli studiază potențialul elastic al acestor corpuri din punctul de vedere termodinamic. Cazul corpurilor cu tensiuni inițiale este pus în evidență de Cr. Teodosiu.

Menționăm că corpurile de tip Cosserat nu pot fi corpuri de gradul II, acestea fiind două direcții distincte de generalizare. Vom putea avea identitate numai în cazul corpurilor cu rotații împiedicate.

5.3. În legătură cu diferitele tendințe de generalizare a teoriei elasticității și de pătrundere a metodelor și formelor ei specifice în cadrul mai larg al mecanicii solidelor deformabile, trebuie să menționăm studiile privind dislocațiile (defecte liniare în cristale). Problema are o importanță deosebită în fizica solidelor; aspectele ei teoretice au început însă să intereseze din ce în ce mai mult și mecanica. Într-adevăr, în cadrul așa numitei teorii continue a dislocațiilor se încearcă prezentarea, sub formă unitară, a teoriei elasticității, teoriei plasticității și a flambajului. Cercetări în această direcție se datoresc, printre alții, lui E. Kröner, R. Stojanović, B. A. Bilby, F. Kroupa, Cr. Teodosiu etc. În Japonia, RAAG (Research Association of Applied Geometry) se ocupă, sub conducerea lui K. Kondo, cu unificarea a diferite teorii ingineresti, prin intermediul geometriei; unul dintre obiective este și cel menționat mai sus.

5.4. O altă linie actuală de cercetare este legătura cu câmpurile termic, magnetic, electric etc. În felul acesta au luat naștere termoelasticitatea, magnetoelasticitatea, electroelasticitatea etc. De asemenea, sînt cazuri în care toate aceste efecte trebuie să fie considerate simultan.

Este important de observat că efectul termic, de exemplu, are influență asupra deformației corpului, dar și reciproc: propagarea căldurii poate fi influențată de deformația corpului și ecuația lui Fourier, de pildă, trebuie completată în consecință. În felul acesta apar așa numitele probleme cuplate ale termoelasticității, magnetoelasticității etc., care nu sînt liniare, dar care — de obicei — se liniarizează. În general, influența cuplajului este foarte mică (cel puțin pentru problemele studiate pînă în prezent), așa încît problemele se pot studia ca necuplate, ceea ce este mult mai simplu.

Teoremele de reciprocitate ce se stabilesc în această direcție sînt foarte importante, ele putînd conduce la metode utile de integrare. Dintre cercetă-

torii care au făcut studii în această direcție amintim pe W. Nowacki, S. Kaliski, V. Ionescu-Cazimir, V. M. Maizel, M. Predeleanu.

5.5. Introducerea unor condiții suplimentare privind tensiunile, deformațiile specifice sau deplasările, conduce la probleme mai simple, prin micșorarea numărului de variabile. În afară de problemele clasice (plană și antiplană), se pot considera numeroase alte probleme bidimensionale (în care a treia variabilă apare în mod explicit, funcțiile necunoscute depinzând numai de două variabile).

Admițând — de exemplu — că tensiunea normală $\sigma_{33} = 0$, P. P. Teodorescu a arătat că celelalte tensiuni normale se vor exprima sub forma

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{4(1+\nu)} \left(x_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \Theta, \quad (5.3)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{4(1+\nu)} \left(x_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \Theta,$$

iar tensiunile tangențiale vor fi date de

$$\sigma_{23} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} x_3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{2} x_3^2 \Delta \varphi + \left(1 - \frac{2}{\nu} \right) \varphi \right], \quad (5.3')$$

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} x_3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{2} x_3^2 \Delta \varphi + \left(1 - \frac{2}{\nu} \right) \varphi \right],$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2^2} \right) - \frac{1}{4(1+\nu)} \left(x_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} \right). \quad (5.3'')$$

Funcția $\Omega = \Omega(x_1, x_2, x_3)$ este armonică

$$\Delta \Omega = 0, \quad (5.4)$$

iar funcția $\Theta = \Theta(x_1, x_2, x_3)$ (suma tensiunilor normale) este liniară în raport cu x_3

$$\Theta = x_3 \Theta_0 + \Theta', \quad (5.5)$$

funcțiile $\Theta_0(x_1, x_2)$ și $\Theta' = \Theta'(x_1, x_2)$ fiind armonice

$$\Delta \Theta_0 = \Delta \Theta' = 0. \quad (5.6)$$

Funcția $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ este biarmonică

$$\Delta \Delta \varphi = 0; \quad (5.7)$$

laplacianul său este legat de funcția Θ_0 prin intermediul ecuațiilor Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial x_1} &= \frac{\partial\Theta_0}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial x_2} &= -\frac{\partial\Theta_0}{\partial x_1}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Observăm că funcția Ω trebuie să fie de clasa C^4 , ca și funcția φ ; este suficient ca funcțiile Θ_0 și Θ' să fie de clasa C^3 . Mai mult, trebuie să observăm că reprezentarea dată depinde numai de trei funcții arbitrare: funcția armonică Ω (în trei variabile), funcția armonică Θ' și funcția biarmonică φ (ultimele două funcții în două variabile). Problema aceasta poate fi deci numită quasibidimensională.

Alte condiții suplimentare conduc la studiul plăcilor plane subțiri (ipoteza elementului liniar a lui G. R. Kirchhoff), plăcilor curbe subțiri (ipoteza elementului liniar a lui A. E. H. Love) și barelor drepte (ipoteza secțiunilor plane a lui Jacob Bernoulli). În legătură cu asemenea tipuri de corpuri, au început să se considere și unele probleme mai speciale, de exemplu: cazul plăcilor plane oblice (Al. Hanuška, V. Ille etc.), introducerea micromomentelor în studiul plăcilor curbe subțiri (M. Mihailescu) etc. Tendința actuală este însă de a studia și valabilitatea aproximațiilor corespunzătoare. În special trebuie să menționăm studiul plăcilor, în cadrul problemelor tridimensionale ale teoriei elasticității, fără a folosi ipoteza Kirchhoff—Love (la noi în țară M. Haimovici, V. Manea, Cr. Stănescu, V. Visarion, L. Librescu, D. Drăghicescu etc.).

5.6. Unele probleme speciale au făcut și fac încă obiectul studiilor multor cercetători. Metodele de calcul respective au fost mult perfecționate în ultimul timp, prin utilizarea unui aparat matematic mai puternic; menționăm astfel aplicarea metodelor variaționale la probleme neliniare, cu ajutorul analizei funcționale neliniare (la noi în țară, Gh. Dincă, I. Beju, P. Mazilu, S. Sburlan).

Vom menționa astfel studiul concentrărilor de tensiuni care pot apare din multiple motive: goluri, variații de secțiune, contactul a două corpuri, fisuri etc. Cele mai multe studii sînt făcute pentru cazul plan, metoda funcțiilor de variabilă complexă jucînd un rol important. De asemenea, trebuie să se țină seama de condițiile suplimentare ce trebuie puse în cazul domeniilor multiplu conexe. Vom menționa astfel cercetările făcute de G. N. Savin și H. Neuber, iar la noi de I. Grindei și L. Solomon.

O altă problemă importantă este cea a sarcinilor concentrate, unde P. P. Teodorescu a pus în evidență un anumit caracter tensorial important, putîndu-se face și o clasificare a acestor sarcini. Se observă, de asemenea, că toate sarcinile concentrate se pot obține pornind de la una singură, de exemplu forța concentrată. În cazul general al corpurilor de tip Cosserat s-a arătat că există două sarcini concentrate (singularități) fundamentale: forța volumică (concentrată) și momentul volumic (concentrat). Rămîne o singură sarcină concentrată fundamentală numai în cazul corpurilor cu rotații împiedicate.

Dorim să punem în evidență faptul că teoria distribuțiilor joacă un rol important în studiul influenței sarcinilor concentrate, după cum a arătat și W. Kec; de asemenea, ea poate conduce la o metodologie generală pentru rezolvarea problemelor teoriei elasticității (W. Kec, P. P. Teodorescu).

Este interesant de observat și legătura care se poate face între teoria elasticității și unele probleme de mecanica fluidelor; o asemenea legătură este ilustrată de teoria aeroelasticității, care stă într-o strînsă legătură cu teoria stabilității sistemelor elastice. În această ordine de idei, menționăm cercetările de aeroelasticitate statică și dinamică ale lui A. Petre.

§ 6. Concluzii

În cele de mai sus, am încercat să punem în evidență poziția teoriei elasticității în cadrul mecanicii solidelor deformabile, ca și modul în care a luat naștere acest important capitol al mecanicii. Scurtul istoric prezentat, ca și formularea problemelor care se pun, credem că dau posibilitatea să se înțeleagă mai bine tendințele de dezvoltare ale acestui capitol; trecerea în revistă a diferite metode de calcul credem că poate, de asemenea, contribui la aceasta.

Este foarte dificil de a prezenta succint ecuații și a da rezultate într-un domeniu atît de vast ca cel pe care ni l-am propus să-l parcurgem; de aceea a trebuit să ne mărginim numai la cîteva aspecte, poate nu totdeauna cele mai importante, și să amintim numai unele cercetări.

În ceea ce privește datele bibliografice ne-am abținut de a face vreo referire; numărul mare de studii făcute face ca aceasta să fie aproape imposibil. De asemenea, în citarea autorilor nu avem nici o pretenție exhaustivă. Pentru cei interesați, menționăm în bibliografie trei lucrări de sinteză, care sînt însoțite fiecare de o bogată bibliografie.

Din prezentarea foarte succint făcută a diferite cercetări recente, credem că pot ieși în evidență unele tendințe de dezvoltare ale teoriei elasticității. În încheiere, dorim să menționăm utilizarea din ce în ce mai frecventă a diferite metode numerice de calcul; aceasta poate conduce la algoritme aplicabile la calculatoare electronice.

BIBLIOGRAFIE

1. P. P. Teodorescu, *One hundred years of investigations in the plane problem of the theory of elasticity*, Applied Mechanics Reviews, vol. 17, nr. 3, sect. I (1964), pp. 175—186; Applied Mechanics Surveys, Spartan Books, Washington, D. C., 1966, pp. 245—262 (O sută de ani de cercetări în problema plană a teoriei elasticității, St. și cerc. mat., vol. 15, nr. 3 (1964) pp. 375—403).
2. P. P. Teodorescu, *Schwingungen der elastischen Kontinua*, III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin, 25—30 Mai 1964, Teil II, Technische Schwin-

gungsprobleme und Fragen der Regelung und Steuerung, Abh. der deutschen Akad. der Wiss. zu Berlin, Kl. für Math., Phys. und Technik, Akad.-Verlag, Berlin, nr. 2 (1965), pp. 29—67 (Vibrațiile mediilor continue elastice, An. Univ. București, mat.-mec., vol. XVIII, nr. 1 (1969), pp. 81—130).

3. P. P. Teodorescu, Sur les corps du type de Cosserat à élasticité linéaire, Istituto Naz. di Alta Matematica, Symposia Matematica, vol. I (1968), Academic Press, London-New York, 1969, pp. 375—409 (Asupra corpurilor de tip Cosserat liniar elastice, St. și cer. mat., vol. 23, nr. 4 (1971)).

TENDENCES DE DÉVELOPPEMENT DANS LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Résumé

Après une introduction et un court historique, l'on présente les problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité et les méthodes de résolution correspondantes; on met ensuite en évidence les tendances actuelles de développement de ce chapitre de la mécanique.

Primit la redacție le 15. II. 1970

Universitatea București
Facultatea de matematică-mecanică

SUR LE GROUPE HOMOGÈNE D'HOLONOMIE DES ESPACES PROJECTIVEMENT EUCLIDIENS

M. TZARINA.

Dans cette note on étudie quelques propriétés du groupe d'holonomie d'un espace projectivement euclidien. Ainsi on démontre que les espaces projectifs à groupe G_1 sont des produits locales $A_2 \times E_{n-2}$ où A_2 est un espace projectif et récurrent. Par intégration directe il est possible de délimiter en général l'ordre du groupe homogène d'holonomie, et même de l'établir pour une certaine classe des espaces.

La notion de groupe d'holonomie dans un espace à connexion affine A a été introduite par E. Cartan [1], [2] qui a considéré la problème de la variation subie par les vecteurs transportés le long d'un contour fermé (cycle) de l'espace.

Par l'intégration des équations du transport des vecteurs contravariants V^i

$$\frac{dV^i}{dt} = \Gamma_{jk}^i V^j \frac{\partial x^k}{\partial t} \quad (1)$$

le long d'un arc de courbe donné par la représentation paramétrique

$$x^i = x^i(t) \quad t \in [0, 1]$$

on obtient la solution au point Q sous la forme

$$V_Q^i = A_j^i(t) V_P^j \quad (2)$$

où A_j^i est la solution du système (1) qui satisfait la condition initiale $A_j^i(0) = \delta_j^i$. Ainsi on a une correspondance entre les espaces tangents E_P et E_Q aux points P , respectivement Q de l'espace A_n . Si le point P coïncide avec Q après le parcours du cycle, on obtient une application de E en eux-même, qui est donc définie par $A_j^i(1) \in GL(n, R)$, élément du groupe linéaire générale. On démontre que l'ensemble des transformations associées de

cette façon à tous les cycles issues d'un point P forme un sous-groupe du groupe $GL(n, R)$ qui est le homogène groupe d'holonomie de A_n au point P . Les groupes d'holonomie en deux points différents sont conjugués. Si on considère seulement les cycles homotopes à zero, le groupe obtenu est le groupe homogène restreint d'holonomie. A l'aide de ces groupes on définit ensuite le groupe d'holonomie locale au point P qui est le même pour tous les points d'un certain voisinage de P .

Dans le cas des espaces C^∞ on introduit aussi le groupe d'holonomie infinitésimale, comme un sous-groupe du groupe d'holonomie locale, définit par une certaine sous-algèbre de l'algèbre de Lie du groupe local. Ça revient à définir le groupe par les operateurs introduits avec les cycles infinitésimaux, qui font intervenir la courbure et la torsion de l'espace [8]. En particulier, si l'espace est sans torsion le groupe d'holonomie infinitésimale est défini par les operateurs

$$Z_{rs} = \Gamma_{jrs}^i X^j \frac{\partial}{\partial X^i}, \quad Z_{rs, t_1 t_2 \dots t_p} = \Gamma_{jrs, t_1 \dots t_p}^i X^j \frac{\partial}{\partial X^i} \quad p = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Les groupes d'holonomie des espaces à connexion ont été largement étudiés du point de vue local et global par plusieurs auteurs parmi lesquels A. Liber [4, 5] A. Lichnerwoicz [6] J. A. Schouten [7] G. Vrăncăanu [8, 9] etc.

1. Nous allons faire quelques remarques au sujet du groupe d'holonomie des espaces projectivement euclidiens. Nous considérons un tel espace rapporté à un système projectif de coordonnées, les coefficients de la connexion étant donnés par les formules

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j \quad (4)$$

Dans les mêmes variables les composantes du tenseur de courbure ont les expressions

$$\Gamma_{jlk}^i = \delta_j^i (\varphi_{kl} - \varphi_{lk}) + \delta_k^i \varphi_{jl} - \delta_l^i \varphi_{jk} \quad (5)$$

où on a noté

$$\varphi_{kl} = \varphi_{k, l} + \varphi_k \varphi_l \quad (6)$$

D'après ce qui est connu [7], [8] si un espace A_n admet un groupe d'holonomie complet à r paramètres G_r donné par les operateurs

$$Z_\alpha = a_{j\alpha}^i X^j \frac{\partial}{\partial X^i} \quad \alpha = \overline{1, r} \quad (7)$$

il faut avoir

$$\Gamma_{jkl}^i = \sum_{\alpha=1}^r a_{j\alpha}^i b_{kl}^\alpha \quad (8)$$

donc on associe à l'espace un système de r tenseurs antisymétriques b_{kl}^α . Pour les espaces projectives on peut faire des précisions concernant le groupe homogène d'holonomie.

Espaces à groupe G_1 .

Dans ce cas il y a un seul opérateur $Z_1 = \Gamma_{j12}^i X^j \frac{\partial}{\partial X^i}$ et les relations (8) devient

$$\Gamma_{jkl}^i = a_j^i b_{kl}$$

Par contraction, compte tenue de formules (5) on obtient

$$P_{kl} = (n+1) (\varphi_{kl} - \varphi_{lk}) = ab_{kl} \quad (a = a_i^i)$$

Si $a = 0$ la transformation du groupe est unimodulaire, c'est à dire appartient au groupe special linéaire SGL (n, R) . Dans ce cas le vecteur φ_k derive d'un gradient et l'espace est equiaffine.

Si $a \neq 0$ on obtient

$$b_{kl} = \frac{P_{kl}}{a}$$

Nous avons donc

Proposition 1. Si la transformation d'un espace projectif à groupe d'hologonomie complet G_1 est unimodulaire, l'espace est equiaffine.

Proposition 2. Si la transformation du groupe d'hologonomie complet G_1 d'un espace projectif n'est pas unimodulaire, le tenseur b_{kl} este proportionnel au tenseur contracté P_{kl} .

D'après A. Liber [4] on sait que dans le cas d'un espace A_n à groupe d'hologonomie G_1 le rang de la matrice (a_j^i) est au plus égal à deux. En arrangeant convenablement les coordonnées il résulte que les seules composantes non nules du tenseur de courbure sont

$$\Gamma_{112}^i = a_1^i \quad \Gamma_{212}^i = a_2^i$$

qui correspondent à une certaine forme canonique de l'opérateur Z_1 . Mais dans le cas d'un espace $A_n (n > 2)$ projectivement euclidien le tenseur de courbure projective de Weyl est nul

$$K_{jkl}^i = 0$$

et ainsi il résulte que toutes les composantes de la courbure sont nulles sauf

$$\Gamma_{112}^1 = a_1^1, \quad \Gamma_{212}^1 = a_2^1 \quad \Gamma_{112}^2 = a_1^2 \quad \Gamma_{212}^2 = a_2^2$$

Par consequent, l'espace est un produit locale d'un espace A_2 et un espace euclidien E_{n-2} . Bien entendu, l'espace A_2 doit être un espace projectivement euclidien et recurrent, c'est à dire on a

$$\Gamma_{jkl, p}^i = \varphi_p \Gamma_{jkl}^i \quad (9)$$

Les conditions invariantes pour un espace projectif à deux dimensions sont

$$\Gamma_{jl, p} = \Gamma_{pl, j} \quad j, l, p = 1, 2 \quad (10)$$

Les formules (9) fournissent par contraction $\Gamma_{jl, p} = \varphi_p \Gamma_{jl}$, donc l'espace est aussi Ricci-recurrent et par suite

$$\Gamma_{jl} = \lambda \varphi_j \varphi_l \quad (10')$$

Le tenseur de Ricci est dégeneré. On peut énoncer

Théorème 1. Un espace A_n projectivement euclidien à groupe complet d'holonomie G_1 est un produit d'un espace A_2 projectif et récurrent et d'un espace euclidien E_{n-2} .

Compte tenue d'un théorème de Ficken [3] on peut ajouter la remarque que le produit considéré n'est pas directe parce que le rang des matrices associés n'est pas maximum.

Le resultat precedent peut etre regardé comme un affermissement d'un théorème démontré par Liber [4] pour le cas des espaces riemanniennes. *Espaces à groupe G_r .*

Il y a des resultats analogues dans le cas des espaces à groupe homogène d'holonomie à r paramètres. À savoir, on peut indiquer des cas particuliers quand l'espace A_n se decompose dans un certain produit des espaces.

Par exemple, considérons avec G. Vranceanu [8] que tous les tenseurs b_{kl}^α sont de rang deux et à variables separées. Alors, dans un système convenable de coordonées on a

$$b_{12}^1 = 1 \quad b_{34}^2 = 1 \quad b_{2r-1, 2r}^r = 1 \quad (11)$$

En utilisant les formules (8) et les identités satisfaites par le tenseur de courbure on obtient

$$a_{j\alpha}^i b_{kl}^\alpha + a_{i\alpha}^j b_{jk}^\alpha + a_{k\alpha}^i b_{li}^\alpha = 0 \quad (12)$$

Par conséquent, vues les relations (11) il resulte que les seules composantes non nules de la courbure sont

$$a_{2p-1, p}^i = \Gamma_{2p-1, 2p-1, 2p}^i \quad a_{2p, p}^i = \Gamma_{2p, 2p-1, 2p}^i \quad p = \overline{1, r}$$

Mais l'espace étant projectif on a aussi $K_{jkl}^i = 0$ donc

$$\Gamma_{j, 2p-1, 2p}^i = 0 \quad \begin{matrix} i \neq 2p-1, 2p \\ j = 2p-1, 2p \end{matrix}$$

Ainsi les operateurs du groupe d'holonomie sont

$$\mathbf{X}_p = \Gamma_{j, 2p-1, 2p}^h X^j \frac{\partial}{\partial X^h} \quad (h, j = 2p-1, 2p) \quad (13)$$

De cette façon nous avons

Théorème 2. Si un espace projectif A_n possède un group homogène d'holonomie à r paramètres donné par les operateurs (13) l'espace est un produit de la forme $A_n = A_2^{(1)} \times \dots \times A_2^{(r)} \times E_{n-2r}$

2. Considérons de nouveau les équations du déplacement parallèle (1). Dans le cas d'un espace projectif, en vertu des formules (4) ces équations deviennent

$$\frac{dV^r}{dt} = \varphi V^r + (\varphi, V) \frac{dx^r}{dt} \quad (14)$$

avec les notations

$$\varphi = \varphi_s \frac{\partial x^s}{\partial t} \quad (\varphi, V) = \varphi_s V^s \quad (15)$$

Dans le cas général la solution du système (11) conduit aussi à des formules de la forme (2).

Supposons que dans le système de coordonnées considéré on a $\varphi_\alpha = 0$ $\alpha > m$. Alors le système s'écrit

$$\frac{dV^i}{dt} = \left(\delta_j^i \varphi + \varphi_j \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) V^j \quad i, j = 1, \dots, m \quad (16)$$

$$\frac{dV^\alpha}{dt} = \varphi V^\alpha + (\varphi_j, V^j) \frac{dx^\alpha}{dt} \quad \alpha = m+1, \dots, n$$

Soit $U_k^i(t)$ la solution du système formé par les premières équations (16) qui satisfait aux conditions initiales $U_k^i(0) = \delta_k^i$. La solution correspondante au point $P(t)$ de la courbe C est

$$V^i(t) = \Sigma C^k U_k^i(t) \quad (16')$$

et par conséquent, en intégrant autour d'un cycle arbitraire on obtient

$$V'^i = a_k^i V^k \quad a_k^i = U_k^i(1)$$

En substituant les fonctions (17) dans les dernières équations (16) on obtient un système linéaire, dont le système homogène est

$$\frac{dV^\alpha}{dt} = \varphi V^\alpha$$

avec la solution générale $V^\alpha = C^\alpha e^{\int_0^t \varphi dt}$. La solution du système non homogène est donc

$$V^\alpha = \left[\int_0^t e^{-\int_0^t \varphi dt} (\varphi_j C^k U_k^j) dx^\alpha + C^\alpha \right] e^{\int_0^t \varphi dt}$$

et après le parcours du cycle en notant

$$b_k^\alpha = b \int_c e^{-\int_0^t \varphi dt} (\varphi_j U_k^j) dx^\alpha \quad b = e^{\int_c \varphi dt}$$

Ces expressions fournissent les equations finies du groupe homogène d'holonomie restreinte qui ont la forme

$$\begin{aligned} V'^i &= a_k^i V^k \\ V'^\alpha &= b_k^\alpha V^k + b V^\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

On a le resultat suivant

Théorème 3. Le groupe d'holonomie des espaces projectifs avec $\varphi_\alpha = 0$ ($\alpha > m$) possède au plus $N = mn + 1$ paramètres.

En particulier on a

COROLLAIRE Si la forme $\varphi_s dx^s$ est de classe m et les variables canoniques sont projectives le groupe homogène d'holonomie de l'espace est au plus à N paramètres.

Dans le cas $m = 1$, on peut intégrer complètement le système (14), la solution fournissant le groupe

$$V'^1 = b^2 V^1 \quad V'^\alpha = b_1^\alpha V^1 + b V^\alpha \quad \alpha = \overline{2, n}$$

à $n + 1$ paramètres. Ainsi dans le cas, le maximum N est atteint.

Si de plus, la forme $\varphi_s dx^s$ est une differentielle totale exacte on a $b = 1$ et le nombre de paramètres diminue avec une unité. On retrouve ainsi le resultat mentioné par G. Vrănceanu p. 397 [8] à savoir

Théorème 4. Le groupe d'holonomie des espaces projectifs à grope maximum de mouvements est à n paramètres.

3. Nous avons considéré l'espace projectif rapporté à un système special de coordonnés. Bien que le vecteur de connexion est invariant seulement par les transformations affines de coordonnés, on peut établir quelques résultats valables à cette restriction.

Disons que le vecteur V est „orthogonal” au vecteur de connexion φ_s , si on a localement $(\varphi V) = 0$. Si le vecteur V^s est transporté par parallélisme le long d'un cycle, en restant toujours orthogonal au vecteur de connexion on a

$$\frac{dV^i}{dt} = \varphi V^i$$

et par suite

$$V^i = V_0^i e^{\int_c \varphi dt}$$

On peut donc enoncer

REMARQUE 1. Si un vecteur V^s transporté par parallélisme le long d'un cycle reste orthogonale au vecteur φ_s , il subit une homotétie de centre P .

REMARQUE 2. Si dans les conditions précédentes la forme $\varphi_s dx^s$ est une differentielle exacte, le vecteur V^s reste invariant après le parcours du cycle.

BIBLIOGRAPHIE

- [2.] E. CARTAN, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*, *Acta Mathematica* 48. p.—42 (1926)
- [3.] A F I C K E N, *The Riemannian and affine Differential Geometry of Product Spaces*, *Annals of Mathematics* t. 40 1939 p. 842—913
- [4.] A. LIBER *O prostranstvah lineinoi affinnoi svyaznosti s odnoparametricheskimi gruppami golonomii.*
Dokladi D.A.N. S.S.S.R. Tom LXVI 6 p. 1045—1046 1949
- [5.] A. LIBER, *O klassifikatsii affinnoi svyaznosti v prostranstve dvuh izmerenii.* *Matematicheskii Sbornik* t. 27 (69) N2 p. 249—266
- [6.] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, E.B. Cremonese, Roma 1955
- [7.] J. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus*, Springer 1954, Berlin
- [8.] G. VRÂNCEANU, *Lecții de Geometrie diferențială* Vol. III Cap. VI Ed. Acad. R.P.R. București 1960
- [9.] G. VRÂNCEANU, *Espaces An à groupe G_1 d'holonomie.* *Matematica Cluj*, vol. 1 (24). fasc. 2 1959 p. 355—367.

Reçu le 15. VI. 1970

Université „Babeș-Bolyai“, Cluj
Faculté de mathématique-mécanique

CONTENTS

1. The first part of the book is devoted to a general survey of the history of the subject, and to a discussion of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	1
2. The second part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	10
3. The third part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	20
4. The fourth part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	30
5. The fifth part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	40
6. The sixth part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	50
7. The seventh part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	60
8. The eighth part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	70
9. The ninth part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	80
10. The tenth part of the book is devoted to a detailed examination of the various theories which have been advanced to explain the origin of the human mind.	90

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR INFINITEZIMALE FOLIAT-CONFORME ALE UNEI VARIETĂȚI RIEMANNIENE FOLIATE

IZU VAISMAN

După cum se știe Acad. Prof. Gh. Vranceanu este autorul teoriei spațiilor neolome [5, 6], care sînt definite de o distribuție regulată, în general neintegrabilă, dată pe o varietate diferențiabilă. În cazul particular cînd distribuția în chestiune este integrabilă se obține pe varietate, ceea ce în terminologia actuală se numește o structură foliată [2] și varietatea dotată cu această structură se numește varietate foliată.

În lucrarea [8] (vezi și [7]) ne-am ocupat cu studiul unor probleme din geometria diferențială a varietăților riemanniene foliate și am stabilit, printre altele, o teoremă (teorema 4.3) de neexistență a câmpurilor de vectori Killing foliate, care este analogă cu o teoremă clasică a lui Bochner [1, 3].

Teorema menționată a lui Bochner este valabilă și pentru transformările infinitezimale conforme ale varietăților riemanniene. În Nota de față ne propunem să arătăm cum se extinde teorema noastră precedentă [8] la transformări infinitezimale foliat-conforme (într-un sens ce se va preciza); va rezulta totodată semnificația mai precisă a teoremei date în [8].

1. Fie V^{n+m} o varietate diferențiabilă, de clasă C^∞ și de dimensiune $n + m$. Dacă pe această varietate este definită o distribuție involutivă regulată de dimensiune m , atunci vom spune că V^{n+m} este o *varietate foliată* și varietățile integrale, conexe, maximale ale distribuției se vor numi *foi* [2]. Dacă, în plus, considerăm pe V^{n+m} și o metrică riemanniană g , atunci vom spune că avem o *varietate riemanniană foliată* și vom putea lua în considerare distribuția ortogonală celei date. Distribuția involutivă se mai numește încă *foliație* sau *distribuție structurală*, iar cea ortogonală ei: *distribuție transversală*.

Vom folosi următoarele notații: $\mathfrak{D}$ -distribuția structurală, $\mathfrak{D}^\perp$ -distribuția transversală, indicii: $a, b, \dots = 1, \dots, n$; $u, v, \dots = n + 1, \dots, n + m$. Diferențiabilitatea va fi mereu înțeleasă în sensul clasei C^∞ . Elementele varietății care depind, într-un sens determinat, numai de foi vor fi numite *foliate*.

Pe V^{n+m} vom folosi hărți locale în care distribuția $\mathfrak{D}$ are ecuațiile

$$dx^a = 0. \quad (1)$$

Dacă $\{x_\alpha^i\}$ și $\{x_\beta^j\}$ sînt două asemenea hărți, transformarea de coordonate între ele este caracterizată de relațiile

$$\frac{\partial x_\beta^a}{\partial x_\alpha^u} = 0. \quad (2)$$

Fie încă, în această hartă, ecuațiile locale ale distribuției $\mathfrak{D}^\perp$:

$$\theta^u = dx^u + t_a^u dx^a = 0. \quad (3)$$

Atunci, în fiecare punct, formele $\{dx^a, \theta^u\}$ definesc o cobază a spațiului tangent și baza duală acesteia este

$$X_a = \frac{\partial}{\partial x^a} - t_a^u \frac{\partial}{\partial x^u}, \quad X_u = \frac{\partial}{\partial x^u}, \quad (4)$$

astfel că $\mathfrak{D}$ e definită de $\{X_u\}$ și $\mathfrak{D}^\perp$ de $\{X_a\}$. În continuare, componentele tuturor tensorilor vor fi luate în raport cu aceste baze și cobaze. În particular, formele diferențiale se vor exprima local ca sume de forme ce conțin, de exemplu, p dintre formele dx^a și q dintre θ^u , forme zise de tip (p, q) . Tipul formelor este invariant la schimbările hărților locale considerate.

Metrica g a varietății se va exprima prin

$$ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + h_{uv} \theta^u \theta^v \quad (5)$$

și vom nota cu $\tilde{h}^{ab}$, $\tilde{h}^{uv}$ elementele matricelor inverse ale matricelor (h_{ab}) și (h_{uv}) .

În [8] se arată că pe V^{n+m} există o conexiune liniară, unic determinată de următoarele condiții: a) $\mathfrak{D}$ și $\mathfrak{D}^\perp$ sînt invariante la transportul paralel, b) vectorii din $\mathfrak{D}$ și $\mathfrak{D}^\perp$ își păstrează lungimea la transportul paralel de-a lungul curbelor tangente la $\mathfrak{D}$, respectiv $\mathfrak{D}^\perp$, c) formele de torsione Ω^a sînt de tip $(0, 2)$, iar formele de torsione Ω^u ale conexiunii sînt de tip $(2, 0)$. Componentele acestei conexiuni față de bazele pe care le folosim sînt

$$\begin{aligned} \Gamma_{ub}^a &= \Gamma_{uv}^a = \Gamma_{ab}^u = \Gamma_{av}^u = \Gamma_{bu}^a = 0, & \Gamma_{va}^u &= X_v t_a^u, \\ \Gamma_{bc}^a &= \frac{1}{2} \tilde{h}^{ad} (X_c h_{bd} + X_b h_{cd} - X_d h_{bc}), \\ \Gamma_{vw}^u &= \frac{1}{2} \tilde{h}^{ut} (X_w h_{vt} + X_v h_{wt} - X_t h_{vw}). \end{aligned} \quad (6)$$

În tot restul acestei Note, cînd vom vorbi de conexiunea varietății V^{n+m} (și de elementele ei: curbura, derivată covariantă etc.) ne vom referi la această conexiune. Derivat acovariantă corespunzătoare se va nota cu o bară.

Observăm că pe foile lui V^{n+m} se induce metrica $d\sigma^2 = h_{uv} \theta^u \theta^v$ și că Γ_{vw}^u este conexiunea Levi-Civita a acestei metrici. Se deduce cu (6)

$$h_{uv/w} = 0. \quad (7)$$

Un caz important este acela când metrica g este de tip *fibrat* [4] sau *foliată*, caz caracterizat de condițiile

$$\frac{\partial h_{ab}}{\partial x^u} = 0 \quad (8)$$

sau de condițiile echivalente

$$h_{ab|u} = 0. \quad (9)$$

În acest caz, vom spune că V^{n+m} este un *spațiu Reinhart* [7].

Fie acum

$$\varphi = \frac{1}{p!q!} \varphi_{a_1 \dots a_p u_1 \dots u_q} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_q} \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_q} \quad (10)$$

o formă diferențială de tip (p, q) pe V^{n+m} , cantitățile φ fiind antisimetrice în primii p și ultimii q indici. Se definește [8] un operator pe care îl putem numi *diferențială exterioară foliată* și pe care îl notăm cu d'' , dat de

$$d''\varphi = \frac{(-1)^p}{p!q!(q+1)!} \varepsilon_{u_1 \dots u_{q+1}}^{v_1 \dots v_q} \frac{\partial \varphi_{a_1 \dots a_p v_1 \dots v_q}}{\partial x^v} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge \quad (11)$$

$$\dots \wedge dx^{a_p} \wedge \theta^{u_1} \dots \wedge \theta^{u_{q+1}} = \frac{(-1)^p}{p!q!(q+1)!} \varepsilon_{u_1 \dots u_{q+1}}^{v_1 \dots v_p}.$$

$$\varphi_{a_1 \dots a_p v_1 \dots v_q} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_{q+1}},$$

unde $\varepsilon_{::}$ este tensorul lui Kronecker. Acest operator se extinde prin liniaritate la toate formele diferențiale, are pătratul nul și satisface o leamnă de tip Poincaré.

Apoi, dacă V^{n+m} este compactă și orientată, folosind operatorul $*$ din teoria formelor armonice (a se vedea de ex. [3]), putem defini produsul scalar al formei φ cu o formă ψ de același tip prin:

$$(\varphi, \psi) = \int_{V^{n+m}} \varphi \wedge * \psi = \frac{1}{p!q!} \int_{V^{n+m}} \varphi_{a_1 \dots a_p u_1 \dots u_q} \psi^{a_1 \dots a_p u_1 \dots u_q} dV, \quad (12)$$

dV fiind elementul de volum al metricii g .

Aceasta ne conduce la considerarea operatorului adjunct al lui d'' , dat de

$$\delta'' = (-1)^{p+q} *^{-1} d'' *. \quad (13)$$

În cazul unui spațiu Reinhart, δ'' este dat de

$$\delta''\varphi = \frac{(-1)^{p-1}}{(n-p)!p!(q-1)!} \tilde{h}^{uv} \varphi_{a_1 \dots a_p v v_1 \dots v_{q-1} u} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge \quad (14)$$

$$\dots \wedge dx^{a_p} \wedge \theta^{v_1} \wedge \dots \wedge \theta^{v_{p-1}}.$$

În fine, introducem *operatorul Laplace foliat prin*

$$\Delta'' = d''\delta'' + \delta''d'' \quad (15)$$

și pentru el se găsesc într-un spațiu Reinhart componentele

$$\begin{aligned} (\Delta''\varphi)_{a_1 \dots a_p u_1 \dots u_q} = & -\frac{1}{(n-p)!} \tilde{h}^{uv} \varphi_{a_1 \dots a_p u_1 \dots u_q/vu} + \\ & + \frac{1}{(n-p)!} \sum_{h=1}^h R_{u_h}^t \varphi_{a_1 \dots a_p u_1 \dots u_q} + \frac{1}{(n-p)!} \sum_{s=1}^q \sum_{s=1}^q R_{u_s u_h}^{vu} \varphi_{a_1 \dots a_p u_1 \dots u \dots v \dots u_q}, \end{aligned}$$

R_{jkh}^i și R_{ij} fiind respectiv tensorul de curbura și tensorul lui Ricci, în notația din [3].

Bineînțeles, dacă considerăm formulele (14) și (16) drept definiții, putem folosi operatorii introduși și în cazul necompact.

2. Să trecem acum la considerarea transformărilor infinitezimale. O asemenea transformare este tot una cu un câmp de vectori definit pe V_{n+m} . Ea definește un grup uniparametric local de transformări ale varietății și, dacă aceasta din urmă e compactă, chiar un grup global. Corespunzător câmpului de vectori ξ avem operatorul L_ξ al derivatei Lie.

Se știe că transformarea infinitezimală ξ invariază distribuția structurală a varietății și deci ansamblul foilor acesteia dacă și numai dacă [8]

$$L_\xi X_u = a_u^v X_v, \text{ adică } [\xi, X_u] = a_u^v X_v, \quad (17)$$

condiție ce revine la

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial x^u} = 0 \text{ sau } \xi_{/u}^a = 0. \quad (18)$$

Transformările infinitezimale, care satisfac această condiție, se numesc *foliate*.

Folosind identitățile lui Jacobi se deduce ușor că dacă ξ și η sînt câmpuri foliate de vectori, la fel este și $[\xi, \eta]$, deci mulțimea S a acestor câmpuri formează o subalgebră Lie a algebrei Lie L a tuturor câmpurilor de vectori pe V^{n+m} . Câmpurile de vectori structurale (adică care aparțin lui $\mathfrak{D}$) au $\xi^a = 0$, deci sînt foliate și se constată că mulțimea S' a acestor câmpuri formează un ideal al lui S . Aceasta rezultă din formulele

$$[X_u, X_v] = 0, [X_a, X_u] = \left(\frac{\partial}{\partial x_u} t_v^a \right) X_v, [X_a, X_b] = \tau_{ab}^u X_u, \quad (19)$$

unde

$$\tau_{ab}^u = \frac{\partial}{\partial x^b} t_a^u - \frac{\partial}{\partial x^a} t_b^u + t_a^v \frac{\partial}{\partial x^v} t_b^u - t_b^v \frac{\partial}{\partial x^v} t_a^u,$$

formule ce se stabilesc prin calcul direct. Deducem deci o structură de algebră Lie pe S/S' . De altfel, S' este ideal și în L , deci L/S' care este izomorf cu spațiul liniar real al câmpurilor transversale de vectori, posedă o structură de algebră Lie.

În [8] au fost considerate câmpurile de vectori Killing foliate și au fost stabilite anumite rezultate asupra lor. Ne propunem acum să considerăm câmpuri de vectori caracterizate de o proprietate mai generală și anume câmpuri pentru care transformarea infinitezimală respectivă duce, local, o foaie în altă foaie (deci este foliată), dar în loc să păstreze în întregime metrica lui V^{n+m} are doar calitatea că corespondența pe care o stabilește între foi este conformă. Asemenea transformări infinitezimale (câmpuri de vectori) vor fi numite *foliat-conforme*. În particular, putem avea transformări *foliat-metrice*, mai generale decât câmpurile Killing foliate.

Să stabilim condițiile ca o transformare infinitezimală

$$\xi = \xi^a X_a + \xi^u X_u = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a} \pm (\xi^u - \xi^a t_a^u) \frac{\partial}{\partial x^u} \quad (20)$$

să fie foliat-conformă.

Se știe că partea principală a transformărilor grupului uniparametric local generat de ξ este

$$\tilde{x}^a = x^a + \xi^a \tau, \quad \tilde{x}^u = x^u + (\xi^u - \xi^a t_a^u) \tau, \quad (21)$$

unde τ este un parametru.

În urma unei asemenea transformări, un câmp structural λ se transformă în

$$\tilde{\lambda}^u = \lambda^u + \lambda^v \frac{\partial}{\partial x^v} (\xi^u - \xi^a t_a^u),$$

iar produsul scalar, în metrica $d\sigma^2$ a unei foi, a două asemenea câmpuri λ și μ devine

$$h_{uv} (x^a + \xi^a \tau, x^u + (\xi^u - \xi^a t_a^u) \tau) \cdot \left(\lambda^u + \lambda^v \frac{\partial}{\partial x^v} (\xi^u - \xi^a t_a^u) \right) \cdot \left(\mu^v + \mu^w \frac{\partial}{\partial x^w} (\xi^v - \xi^b t_b^v) \right).$$

Partea principală a variației acestui produs este

$$\left[\frac{\partial h_{uv}}{\partial x^a} \xi^a + \frac{\partial h_{uv}}{\partial x^w} (\xi^w - \xi^a t_a^w) + h_{wv} \frac{\partial}{\partial x^u} (\xi^w - \xi^a t_a^w) + h_{uv} \frac{\partial}{\partial x^v} (\xi^w - \xi^a t_a^w) \right] \cdot \lambda^u \mu^v.$$

Deci, conform definiției, ξ este o transformare infinitezimală foliat-conformă dacă și numai dacă avem (18) și variația produsului scalar precedente de forma $\rho h_{uv} \lambda^u \mu^v$ pentru orice λ^u și μ^v . Făcînd calculele și ținînd cont de formulele (6) și (18) se constată că această ultimă condiție revine la

$$\xi_{u/v} + \xi_{v/u} + h_{uv/a} \xi^a = \rho h_{uv}. \quad (22)$$

Deci transformările infinitezimale foliat-conforme sînt caracterizate de condițiile (18) și (22). În particular, transformările foliat-metrice sînt caracterizate de (18) și

$$\xi_{u/v} + \xi_{v'/u} + h_{uv/a} \xi^a = 0. \quad (23)$$

Aceste condiții mai pot fi interpretate încă într-un mod și anume.

Să considerăm fibrarea vectorială D , cu baza V^{n+m} , definită de distribuția $\mathfrak{D}$, pe care o vom numi *fibrare structurală* a lui V^{n+m} [8] (în mod analog, există o *fibrare transversală* $\mathfrak{D}^\perp$) și diversele produse tensoriale ale lui D cu el însuși și cudualul său. Vom numi *cîmpuri de tensori structurali* secțiunile fibrărilor vectoriale astfel obținute. Fiecărui cîmp de tensori structurali T i se asociază univoc un cîmp de tensori T' pe V^{n+m} , ale cărui componente ce au măcar un indice între 1 și n se anulează, celelalte componente fiind egale cu cele ale cîmpului structural dat. Dacă acum ξ este un cîmp de vectori, definim un operator L_ξ'' pe cîmpurile structurale, prin condiția ca el să ducă T în cîmpul structural definit de componentele cu indici între $n+1$ și $n+m$ ale lui $L_\xi T'$. Acest operator se va numi *derivată Lie foliată*. Or, este ușor de constatat, folosind formulele (19) și calculul obișnuit al derivatei Lie (ca în [8] de exemplu) că pentru tensorul structural $h(h_{uv})$ avem

$$(L_\xi'' h)_{uv} = \xi_{u/v} + \xi_{v/u} + h_{uv/a} \xi^a. \quad (24)$$

Deci condițiile (22) și (23) se reduc respectiv la

$$L_\xi'' h = \rho h \quad \text{și} \quad L_\xi'' h = 0. \quad (25)$$

De altfel, comparînd (23) cu condițiile satisfăcute de cîmpurile de vectori Killing [8], se vede că avem tocmai una din acele condiții și anume unica folosită în deducerea teoremei 4.3 menționată în introducere. Acea teoremă 4.3 este deci valabilă, de fapt, pentru transformări infinitezimale foliat-metrice.

Reluăm acum din [8] drumul demonstrației teoremei 4.3, dar cu referire la transformări infinitezimale foliat-conforme, pentru a ajunge la rezultatul pe care îl urmărim.

Fie ξ dat de (20) o transformare infinitezimală foliat-conformă pe V^{u+m} și să presupunem că acesta din urmă este un spațiu Reinhart compact și orientat. Să considerăm forma Pfaff de tip $(0, 1)$

$$\zeta = \xi_u \theta^u. \quad (26)$$

Cu formula (14) și folosind condiția (22) găsim

$$\delta'' \zeta = \frac{1}{2n!} \tilde{h}^{uv} h_{uv/c} \xi^c - \frac{\rho}{2(n-1)!}. \quad (27)$$

Vom impune acum o condiție mai tare decît în [8] și anume vom cere ca

$$\tilde{h}^{uv} h_{uv/c} = 0, \quad (28)$$

după care (27) devine

$$\delta''\zeta = -\frac{\rho}{2(n-1)!}. \quad (29)$$

Folosind faptul că δ'' este adjunctul lui d'' și definiția lui Δ'' urmează imediat

$$(\Delta''\zeta, \zeta) = (d''\zeta, d''\zeta) + (\delta''\zeta, \delta''\zeta) \quad (30)$$

și vom calcula separat termenii acestei identități (calculule sînt cele din [8]).

Din (16) rezultă

$$(\Delta''\zeta, \zeta) = \frac{1}{n!} \int_V (-\tilde{h}^{vw} \xi_{u/wv} \xi^u + R^t_u \xi_t \xi^u) dV.$$

Considerăm funcția $\alpha = \xi_u \xi^u$ și scriem relația

$$(\delta''d''\alpha, 1) = (d''\alpha, d''1) = 0,$$

care dă

$$\int_V \tilde{h}^{uv} \alpha_{uv} dV = 0$$

și explicitînd derivatele covariante:

$$(\Delta''\zeta, \zeta) = \frac{1}{n!} \int_V (R_{ut} \xi^u \xi^t + \tilde{h}^{vw} \xi_{u/v} \xi^u) dV. \quad (31)$$

Apoi, cu formula (11), făcînd calculule necesare și ținînd cont de (22) și (28), avem

$$(d''\zeta, d''\zeta) = 2 \int_V \tilde{h}^{vw} \xi_{u/w} \xi_{v/u}^u dV + \frac{1}{2} \int_V C_{ab} \xi^a \xi^b dV - \int_V \rho \xi_{/u}^u dV, \quad (32)$$

unde am notat

$$C_{ab} = \tilde{h}_{/a}^{uv} h_{uv/b} = -\tilde{h}^{uv} h_{uv/ab}.$$

În fine, din (29) avem

$$(\delta''\zeta, \delta''\zeta) = \frac{1}{4((n-1)!)^2} \int_V \rho^2 dV. \quad (33)$$

Înlocuind aceste rezultate în (30) și ținînd cont de faptul că, după (14), avem $\xi_{/u}^u = -n! \delta''\zeta$, putem pune relația obținută sub forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n!} - 2\right) \int_V \tilde{h}^{vw} \xi_{u/w} \xi_{v/u}^u dV + \frac{1}{n!} \int_V R_{ut} \xi^u \xi^t + \frac{1}{2} \int_V \tilde{h}^{uv} h_{uv/ab} \xi^a \xi^b dV = \\ = \left(\frac{1}{4((n-1)!)^2} + \frac{n}{2}\right) \int_V \rho^2 dV. \end{aligned} \quad (34)$$

Evident, membrul secund al acestei egalități este nenegativ, deci, dacă se întâmplă ca formele $R_{\mu t} \xi^\mu \xi^t$ și $\tilde{h}^{\mu\nu} h_{\mu\nu|ab} \xi^a \xi^b$ să fie negativ definite, cum și primul termen din (34) e negativ (căci $n \geq 1$), va rezulta că toți termenii egalității (34) se anulează, de unde deducem $\xi^a = 0$ și $\xi^a = 0$.

Am ajuns astfel la rezultatul dorit:

Teoremă. *Pe un spațiu Reinhart V^{n+m} , compact, orientabil și care satisface condițiile: a) $\tilde{h}^{\mu\nu} h_{\mu\nu|a} = 0$, b) forma curburii Ricci a foilor este negativ definită, c) forma $\tilde{h}^{\mu\nu} h_{\mu\nu|ab} \xi^a \xi^b$ este negativ definită, nu există transformări infinitezimale foliat-conforme netriviiale.*

Forma condiției b) din teoremă rezultă din observația anterioară că $\Gamma_{\mu\nu}^{\mu\nu}$ este conexiunea Levi-Civita a foilor.

În particular, din teorema precedentă deducem neexistența pe V^{n+m} a transformărilor infinitezimale foliat-metrice și a câmpurilor de vectori Killing, foliate, dar pentru acest rezultat condiția a) de mai sus poate fi înlocuită cu condiția mai slabă $\tilde{h}^{\mu\nu} h_{\mu\nu|at} = 0$ (care este o consecință a lui a)) și în locul lui c) să cerem ca forma $C_{ab} \xi^a \xi^b$ să fie pozitiv definită, așa cum ne arată teorema 4.3 din [8]. Teorema noastră este deci o extindere a teoremei 4.3 din [8], dar ea a necesitat impunerea condiției mai tari a). Remarcăm că urmînd același drum se poate demonstra că condițiile teoremei 4.3 din [8] asigură și neexistența transformărilor infinitezimale, pe care le-am putea numi *foliat-omotetice*, definite ca transformări foliat-conforme pentru care $d''\delta''\zeta = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Bochner — *Vector fields and Ricci curvature*. Bull. Am. Math. Soc. 52 (1946), p. 776—797.
2. Ch. Ehresmann — *Sur la théorie des variétés feuilletées*. Rend. di Mat. e App1., 10 (1951), p. 64—82.
3. S. I. Goldberg — *Curvature and Homology*. Academic Press, New York, 1962.
4. B. L. Reinhart — *Foliated manifolds with bundle-like metrics*. Ann. of Math., 69 (1959), p. 119—132.
5. Gh. Vrănceanu — *Sur les espaces non holonomes*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 183 (1926), p. 852.
6. Gh. Vrănceanu — *Leçons de géométrie différentielle*, II. Ed. Acad. Roumaine, Bucurest, 1957.
7. I. Vaisman — *Sur la cohomologie des variétés riemanniennes feuilletées*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, Série A, p. 720—723.
8. I. Vaisman — *Variétés riemanniennes feuilletées*. Czechosl. Math. J., 1970 (sub tipar).

Primită la 5. VI. 1970

Universitatea „Al. I. Cuza,” Iași
Facultatea de matematică-mecanică

О СЛОИСТО-КОНФОРМНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СЛОИСТОГО РИМАНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Краткое содержание

При помощи известного жетода Бохнера (1), (3) и следуя вычислениям нашей работы 8), доказывается теорема несуществования слоисто-конформных бесконечно малых преобразований на одном классе компактных слоисто-римановых многообразий.

SUR LES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES FEUILLETÉES CONFORMES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENN FEUILLETÉE

Résumé

En employant la méthode bien connue de Bochner [1], [3] et les calculs de notre travail [8], nous démontrons un théorème de nonexistence des transformations infinitésimales feuilletées conformes sur une classe de variétés riemanniennes feuilletées compactes.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
540 EAST 57TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
540 EAST 57TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
540 EAST 57TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
540 EAST 57TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637

SUR LES VECTEURS TANGENTS AUX VARIÉTÉS FERMÉES DÉFINIES SUR SPHÈRES

T. WESZELY

On étudie la condition, pour que sur la variété fermée $V_7(k)$ (donnée par (1) pour $n = 4$) en existe un système de deux vecteurs tangents réguliers.

Nous considérons une variété $V_{2n-1}(k)$ définie dans l'espace euclidien E_{2n+2} par les équations

$$\begin{aligned} z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n &= 1 \\ z_0^k + z_1^2 + \dots + z_n^2 &= 0, \end{aligned} \quad z_h = x_h + iy_h, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (1)$$

où k est un nombre naturel ($k \geq 2$).

Les variétés $V_{2n-1}(k)$ définies par les équations (1) sont fermées [3]. Observons maintenant qu'on peut écrire les équations (1) sous la forme

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2 &= 1 \\ P + x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 &= 0 \\ Q + 2x_1y_1 + \dots + 2x_ny_n &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

ou

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + P + 2(x_1^2 + \dots + x_n^2) &= 1 \\ x_0^2 + y_0^2 - P + 2(y_1^2 + \dots + y_n^2) &= 1 \end{aligned} \quad (2')$$

$$Q + 2x_1y_1 + \dots + 2x_ny_n = 0,$$

cù pour $P(x_0, y_0)$ et $Q(x_0, y_0)$ nous avons: $(x_0 + iy_0)^k = P + Qi$, donc

$$P = \frac{(x_0 + iy_0)^k + (x_0 - iy_0)^k}{2}; \quad Q = \frac{(x_0 + iy_0)^k - (x_0 - iy_0)^k}{2i}. \quad (3)$$

En tenant compte de (3), il en résulte les formules

$$P_{x_0} = Q_{y_0}; \quad P_{y_0} = -Q_{x_0}; \quad P_{x_0}^2 + P_{y_0}^2 = P_{x_0}Q_{y_0} - P_{y_0}Q_{x_0} = k^2(x_0^2 + y_0^2)^{k-1}.$$

On peut observer facilement que la première équation (1) représente l'équation d'une sphère S_{2n+1} dans l'espace euclidien $E_{2n+2}(x_0, y_0, \dots, x_n y_n)$.

G. Vrănceanu montre que sur la variété $V_{2n-1}(k)$ il y a un champ de vecteurs tangents réguliers (qui ne s'annulent dans aucun point de la variété) [1]:

$$v_1(2y_0, -2x_0, ky_i - kx_i).$$

On peut montrer que dans le cas $n = 3p - 1$ (p est un nombre naturel) et $k = 2$, sur la variété $V_{2n-1}(k)$ il existe un système de deux vecteurs tangents réguliers [4].

Nous allons montrer dans ce travail que sur la variété $V_{2n-1}(k)$ pour $n = 4$ et $k > 2$ en général existent deux vecteurs tangents réguliers.

Considérons donc le vecteur $v_2(\alpha_i, \beta_i)$ tangent à la variété $V_7(k)$ et orthogonal au vecteur v_1 . On doit avoir donc les conditions

$$\begin{aligned} (2x_0 + P_{x_0}) \alpha_0 + (2y_0 + P_{y_0}) \beta_0 + 4x_i \alpha_i &= 0 \\ (2x_0 - P_{x_0}) \alpha_0 + (2y_0 - P_{y_0}) \beta_0 + 4y_i \beta_i &= 0 \\ Q_{x_0} \alpha_0 + Q_{y_0} \beta_0 + 2y_i \alpha_i + 2x_i \beta_i &= 0 \\ 2y_0 \alpha_0 - 2x_0 \beta_0 + ky_i \alpha_i - kx_i \beta_i &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

Nous pouvons écrire ces conditions sous la forme

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_0}{2} + \frac{P_{x_0}}{4}\right) \alpha_0 + \left(\frac{y_0}{2} + \frac{P_{y_0}}{4}\right) \beta_0 + x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4 &= 0 \\ \left(\frac{y_0}{k} - \frac{P_{y_0}}{4}\right) \alpha_0 + \left(-\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}\right) \beta_0 + y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 + y_3 \alpha_3 + y_4 \alpha_4 &= 0 \\ \left(-\frac{y_0}{k} - \frac{P_{y_0}}{4}\right) \alpha_0 + \left(\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}\right) \beta_0 + x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3 + x_4 \beta_4 &= 0 \\ \left(\frac{x_0}{2} - \frac{P_{x_0}}{4}\right) \alpha_0 + \left(\frac{y_0}{2} - \frac{P_{y_0}}{4}\right) \beta_0 + y_1 \beta_1 + y_2 \beta_2 + x_3 \beta_3 + x_4 \beta_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Nous pouvons donc prendre comme solutions du système (4)

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x_1 y_1 - x_2 y_1; & \beta_0 &= x_3 y_4 - x_4 y_3 \\ \alpha_1 &= x_2 \left(\frac{y_0}{k} - \frac{P_{y_0}}{4}\right) - y_2 \left(\frac{x_0}{2} + \frac{P_{x_0}}{4}\right); & \beta_1 &= x_2 \left(\frac{x_0}{2} - \frac{P_{x_0}}{4}\right) + y_2 \left(\frac{y_0}{k} + \frac{P_{y_0}}{4}\right) \\ \alpha_2 &= y_1 \left(\frac{x_0}{2} + \frac{P_{x_0}}{4}\right) - x_1 \left(\frac{y_0}{k} - \frac{P_{y_0}}{4}\right); & \beta_2 &= -y_1 \left(\frac{y_0}{k} + \frac{P_{y_0}}{4}\right) - x_1 \left(\frac{x_0}{2} - \frac{P_{x_0}}{4}\right) \\ \alpha_3 &= x_4 \left(-\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}\right) - y_4 \left(\frac{y_0}{2} + \frac{P_{y_0}}{4}\right); & \beta_3 &= x_4 \left(\frac{y_0}{2} - \frac{P_{y_0}}{4}\right) - y_4 \left(\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}\right) \\ \alpha_4 &= y_3 \left(\frac{y_0}{2} + \frac{P_{y_0}}{4}\right) - x_3 \left(-\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}\right); & \beta_4 &= y_3 \left(\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}\right) - x_3 \left(\frac{y_0}{2} - \frac{P_{y_0}}{4}\right). \end{aligned} \quad (4')$$

Les conditions suffisantes et nécessaires pour que les composantes du vecteur v_2 , données par les formules (4'), soient toutes nulles sont

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{\frac{x_0}{2} + \frac{P_{x_0}}{4}}{\frac{y_0}{k} - \frac{P_{x_0}}{4}} = \frac{-\frac{y_0}{k} - \frac{P_{y_0}}{4}}{\frac{x_0}{2} - \frac{P_{x_0}}{4}} = \lambda_1 \quad (5)$$

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} = \frac{\frac{y_0}{2} + \frac{P_{y_0}}{4}}{-\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}} = \frac{\frac{x_0}{k} + \frac{P_{x_0}}{4}}{\frac{y_0}{2} - \frac{P_{y_0}}{4}} = \lambda_2.$$

En tenant compte des conditions (5) nous obtenons

$$P_{x_0}^2 + P_{y_0}^2 = 16 \left(\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{k^2} \right)$$

$$P_{x_0}^2 + P_{y_0}^2 = 16 \left(\frac{x_0^2}{k^2} + \frac{y_0^2}{4} \right)$$

conditions qui sont équivalentes aux conditions :

$$x_0^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2} \right) = y_0^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (6)$$

$$(x_0^2 + y_0^2)^{k-2} = \frac{2}{k^4} (k^2 + 4).$$

En supposant $k > 2$, et tenant compte de (6) nous avons

$$x_0^2 = y_0^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{k^4} (k^2 + 4) \right]^{\frac{1}{k-2}}. \quad (7)$$

Tenant compte des conditions (5), les équations (2') prennent la forme

$$x_0^2 + y_0^2 + P + 2\lambda_1^2(y_1^2 + y_2^2) + 2\lambda_2^2(y_3^2 + y_4^2) = 0$$

$$x_0^2 + y_0^2 - P + 2(y_1^2 + y_2^2) + 2(y_3^2 + y_4^2) = 0$$

$$Q + 2\lambda_1(y_1^2 + y_2^2) + 2\lambda_2(y_3^2 + y_4^2) = 0$$

La variété $V_{2n-1}(k)$ ne contient pas les points pour lesquels $x_i = y_i = 0$, ($i = 1, \dots, n$) [2].

En éliminant $y_1^2 + y_2^2$ et $y_3^2 + y_4^2$ de ces équations nous obtenons la condition

$$x_0^2 + y_0^2 + P + (\lambda_1 + \lambda_2) Q + \lambda_1 \lambda_2 (P - x_0^2 - y_0^2) = 0 \quad (8)$$

Mais on peut déterminer les valeurs λ_1 et λ_2 en fonction de k à l'aide des conditions (5) et (7). Si ces valeurs du λ_1 et λ_2 et du x_0 et y_0 données par (7) ne vérifient pas la condition (8), alors le vecteur v_2 ayant les composantes définies par (4') est un vecteur régulier, parce qu'il ne s'annule dans aucun point de la variété $V_7(k)$. En ce cas sur la variété $V_7(k)$ il y a un système de deux vecteurs réguliers et orthogonaux donnés par les vecteurs v_1 et v_2 .

Par exemple, pour $k = 3$ nous avons :

$$P = x_0^3 - 3x_0y_0^2, \quad Q = 3x_0^2y_0 - y_0^3,$$

et pour λ_1, λ_2 , en tenant compte de (5) et (7) nous obtenons

$$\lambda_1 = \frac{(9x_0 - 2)y_0}{3x_0}, \quad \lambda_2 = \frac{(9x_0 - 3)y_0}{2x_0}.$$

Avec $k=3$ nous obtenons de (7) les valeurs $x_0 = \pm \frac{\sqrt{13}}{9}$; $y_0 = \pm \frac{\sqrt{13}}{9}$.

En introduisant dans (8) les valeurs λ_1 et de λ_2 calculées pour toutes les quatre couples x_0, y_0 , il est facile à démontrer que la condition (8) n'est pas vérifiée.

Pour $k = 4$, nous avons

$$P = (x_0^2 - y_0^2)^2 - 4x_0^2y_0^2; \quad Q = 4x_0y_0(x_0^2 - y_0^2),$$

$$\lambda_1 = \frac{y_0(8x_0^2 - 1)}{x_0(2 + 8y_0^2)}; \quad \lambda_2 = \frac{x_0(1 - 8y_0^2)}{y_0(2 + 8x_0^2)}$$

et

$$x_0 = \pm \frac{\sqrt[4]{10}}{4}; \quad y_0 = \pm \frac{\sqrt[4]{10}}{4}.$$

Avec une démonstration analogue à celle de ci-dessus on prouve que la condition (8) n'est pas vérifiée pour aucune des couples x_0, y_0 . Nous avons donc le théorème :

Sur une variété fermée $V_7(k)$ existent deux champs de vecteurs tangents orthogonaux, réguliers, si la condition (8) — où λ_1 et λ_2 sont déterminées par les conditions (5) — n'est pas vérifiée par les couples x_0, y_0 données de (7).

Nous avons montré par exemple que les variétés $V_7(3)$ et $V_7(4)$ possèdent deux champs de vecteurs tangents réguliers.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Vranceanu — *Campi di vettori tangenti alle sfere esotiche*, Rendiconti di Messina — 1968.
2. G. Vranceanu — *Lecții de geometrie diferențială*, vol. IV, Edit. Acad. — București — 1968.
3. F. Hirzebruch — *Singularities and exotic spheres*, Séminaire Bourbaki, n°. 314 Novembre 1966.
4. T. Wszely — *Cîmpuri de repere pe cîteva varietăți compacte definite pe sfere*, St. Cerc. Mat. tom 22 (1970), nr. 1, p. 197.

Reçu le 29. 11. 1969

Institut pédagogique, Tirgu Mureș



Redactor: ȘTEFANIA BARBU
Tehnoredactor: GH. TIȚĂ

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI
MATEMATICĂ-MECANICĂ

Anul XIX — Nr. 2 — 1970